RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 13 aprile 1924.

V. VOLTERRA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Su una separazione di singolarità in una funzione analitica.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

1. Come in due Note precedenti (1), considero una funzione $\sigma(t)$ della variabile reale t, data fra 1 e $+\infty$, e tale che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t}$$

sia convergente, onde segue (I, 2), che la funzione analitica

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x},$$

è regolare in tutto il piano x ad eccezione del taglio t eseguito lungo l'asse reale fra 1 e $+\infty$. Si aggiungerà l'ipotesi *che le due prime derivate di* $\sigma(t)$ *abbiano le stesse proprietà ammesse per la* $\sigma(t)$ *stessa*: questa condizione, che non sarebbe difficile di rendere meno restrittiva, permette di evitare una discussione che non ha importanza per il fatto che ci proponiamo di porre in evidenza.

Si è veduto (I, 4) che la $f(x)$ è sviluppabile, entro il cerchio $|x| < 1$, in una serie di potenze $\Sigma q_n x^n$ i cui coefficienti sono i valori, per $z = 0, 1, 2, \ldots$, della funzione determinante

$$\Phi(z) = \int_1^\infty \sigma(t)\, t^{-z-1}\, dt,$$

(1) Questi Rendiconti, seduta del 13 gennaio e del 2 marzo 1924. Esse verranno qui richiamate con I e II, seguìti dal numero del paragrafo.

e dalle proprietà della funzione determinante, in base alle ipotesi fatte su $\sigma(t)$, risulta facilmente che è

$$\lim \frac{\Phi(z+1)}{\Phi(z)} = 1 \quad \text{per} \quad z \to +\infty ;$$

ne viene che posto

$$a_0 = \frac{1}{q_0} \quad , \quad a_n = \frac{q_{n-1}}{q_n} ,$$

segue

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} , \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 1 .$$

2. Si definisca ora un'operazione lineare, che verrà indicata con A, la quale per ogni potenza intera positiva della variabile x sia definita da

$$(2) \qquad A(x^n) = x^n (a_n - x) , \qquad (n = 0 , 1 , 2 , \dots) ;$$

questa operazione è formalmente applicabile ad ogni serie di potenze intere positive di x, ed è anche effettivamente applicabile, in quanto il risultato dell'operazione è una serie di potenze convergente in un cerchio non minore del cerchio di convergenza della serie cui è applicata. Se $\varphi = \Sigma c_n x^n$ è convergente in un cerchio (r) [1], si avrà

$$(3) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c_n - c_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

il cui raggio di convergenza non è inferiore ad r.

Indicando con (S) l'insieme delle serie di potenze di x il cui raggio di convergenza è superiore all'unità, sia φ un elemento di S; ne viene allora che la serie $\Sigma h_n a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ è convergente, e dall'essere $h_n = a_n c_n - c_{n-1}$, si riconosce che la sua somma è lo zero. Talchè

« Se φ è un elemento di S, ed è $A(\varphi) = \Sigma h_n x^n$, si ha

$$(4) \qquad h_0 + h_1 a_0 + h_2 a_0 a_1 + \dots + h_n a_0 a_1 \dots a_{n-1} + \dots = 0 \text{ » [2].}$$

In altri termini, l'operazione A applicata ad (S) produce elementi di (S), ma soggetti alla condizione (4): si potrebbe dire che essi appartengono ad un iperpiano (S') di (S).

[1] Con (r) si indica il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio r.

[2] Questo risultato ed altri analoghi si trovano nelle mie Note: *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche*, Rend. della R. Accad. di Bologna, 30 gennaio 1898, e *Di un'estensione del concetto di divisibilità per un polinomio*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 3 aprile 1898.

3. La reciproca è vera: « se cioè una serie $\psi = \Sigma h_n x^n$ di (S) sod-« disfa, coi suoi coefficienti, alla relazione (4), essa è il risultato della A « applicata ad un elemento di (S) ».

Si consideri infatti l'operazione A^{-1}, inversa di A. Si trova immediatamente che è

$$(5) \qquad A^{-1}(1) = \frac{1}{a_0} + \frac{x}{a_0 a_1} + \frac{x^2}{a_0 a_1 a_2} + \cdots = f(x),$$

ed

$$(5') \qquad A^{-1}(x^m) = \frac{x^m}{a_m} + \frac{x^{m+1}}{a_m a_{m+1}} + \frac{x^{m+2}}{a_m a_{m+1} a_{m+2}} + \cdots,$$

serie convergenti nel cerchio di raggio 1. Applicando la A^{-1} all'elemento di (S) $\varphi = \Sigma c_n x^n$, si trova immediatamente

$$(6) \qquad A^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 a_0 + \cdots + c_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) \frac{x^n}{a_0 a_1 \ldots a_n};$$

ma se si cerca il raggio di convergenza della serie nel secondo membro, si vede subito che esso è uguale ad 1, se la somma della serie

$$(7) \qquad c_0 + c_1 a_0 + c_2 a_0 a_1 + \cdots$$

(convergente, come si è detto) è diversa da zero. Se invece essa è uguale a zero, dall'essere

$$c_0 + c_1 a_0 + \cdots + c_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = \\ = -a_0 a_1 \ldots a_n (c_{n+1} + c_{n+2} a_{n+1} + c_{n+3} a_{n+1} a_{n+2} + \cdots),$$

e dal valore maggiorante dei coefficienti c_n si deduce che la serie (6) ha lo stesso raggio di convergenza della φ e quindi che $A^{-1}(\varphi)$ appartiene ad (S); la proposizione reciproca è così dimostrata.

L'operazione A^{-1}, applicata agli elementi di (S), riduce dunque in generale il loro cerchio di convergenza ed introduce cioè una singolarità posta sulla circonferenza $|x| = 1$; vi è eccezione per gli elementi di (S') e per questi soltanto: su questi, l'applicazione di A^{-1} non produce singolarità.

4. Si indichi con C la somma della serie (7); la $\varphi(x) - C$ apparterrà allora ad (S'), e sarà

$$A^{-1}(\varphi(x) - C) = A^{-1}(\varphi) - CA^{-1}(1) = A^{-1}(\varphi) - C f(x) = \psi(x)$$

un elemento di (S). Ne segue

$$(8) \qquad A^{-1}(\varphi) = \psi(x) + C f(x),$$

e si vede da ciò come la singolarità introdotta da A^{-1} sia precisamente quella rappresentata da $f(x)$, all'infuori del moltiplicatore costante C.

Tutte le funzioni ottenute dall'applicazione di A^{-1} agli elementi di (S) hanno per $|x| = 1$ la medesima singolarità; se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono due elementi di (S) e C, C′ sono le somme delle rispettive serie (7), la $C'\varphi(x) - C\psi(x)$ apparterrà ad (S'), cioè la singolarità di $C'\varphi(x)$ e quella di $C\psi(x)$ per $|x| = 1$ si distruggono.

L'operazione A può dirsi *pertinente* alla funzione $f(x)$.

5. Mutando x in x/α, le a_n si mutano in $a_n\alpha$ ed il cerchio (1) nel cerchio $(|\alpha|)$; la A è definita da

$$A(x^n) = x^n(a_n\alpha - x)$$

e la A^{-1} introduce un termine $cf(x)$ avente come singolarità un taglio (essenziale o no) fatto da α ad ∞ lungo il raggio di azimut arg. α.

La $f(x/\alpha)$ verrà detta *funzione semplice relativa ad* α.

Il caso volgare in cui sono $a_0 = a_1 = \cdots a_n = \cdots = 1$, dà per l'operazione A^{-1} la divisione per $x - \alpha$; la singolarità introdotta è il polo di primo ordine $x = \alpha$, e l'iperpiano (S') è l'insieme delle serie convergenti in cerchi (r) [con $r > |\alpha|$] e divisibili per $x = \alpha$.

6. Sia data una serie di potenze $F(x) = \Sigma c_n x^n$ di cui r sia il raggio di convergenza, e si supponga verificato in qualsiasi modo che l'operazione A, pertinente ad una funzione semplice $f_1(x)$ relativa ad α [con $(\alpha) = r$] ed applicata ad F, dia come risultato una serie di potenze $G(x)$ convergente in un cerchio di raggio $r' > r$. È dunque

$$F(x) = A^{-1}(G(x)),$$

e perciò sarà applicabile la (8), cioè, indicando con $F_1(x)$ una serie di potenze avente come raggio r', si avrà

$$F(x) = F_1(x) + c_1 f_1(x).$$

La funzione analitica rappresentata da $F(x)$ entro il cerchio (r) esiste dunque fuori di questo cerchio, ha sulla circonferenza la singolarità rappresentata da $f(x)$ e lungo la porzione del taglio di $f(x)$ compreso entro la circonferenza (r'), fra il punto α e la circonferenza stessa, ha un salto dato da $c_1\sigma$, essendo σ il salto di $f(x)$.

Qualora si trovasse per $F_1(x)$ un'operazione B, pertinente ad una funzione semplice $f_2(x)$ relativa a β (con $|\beta| = r'$) ed avente analogo effetto su F_1, si avrebbe in modo analogo

$$F(x) = F_2(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

dove $F_2(x)$ è una serie di potenze convergente in un cerchio di raggio

$r'' > r'$. E così si può proseguire: qualora, coll'applicazione successiva del metodo, si giungesse ad un'espressione

$$F(x) = \sum_1^m {}_\nu c_\nu f_\nu(x) + F_m(x),$$

dove $F_m(x)$ risultasse funzione intera, la separazione delle funzioni semplici $f_\nu(x)$, caratteristiche delle singolarità di $F(x)$, metterebbe in evidenza il comportamento di $F(x)$ su tutta la propria stella di Mittag–Leffler.

Il metodo precedente presuppone che i punti $\alpha, \beta, \ldots$, cui sono relative le successive funzioni semplici $f_1(x), f_2(x), \ldots$, siano di moduli crescenti. Rimane da vedere come il metodo stesso vada modificato se due o più di questi punti abbiano moduli uguali. Rimane pure da dare esempî dell'applicazione di questo metodo: esempî che può fornire senza difficoltà la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, anche d'ordine infinito.

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione delle rotazioni viscose.* Nota del Corrispondente Umberto Cisotti.

1. *Richiamo dell'equazione caratteristica.* — Ho denominato *rotazioni viscose* [1] i moti, compatibili colle equazioni indefinite di fluidi viscosi incomprimibili, nei quali la velocità di un generico punto P è definita dalla relazione vettoriale

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \wedge (P - O), \tag{1}$$

essendo O un punto fisso e $\mathbf{k}$ un vettore unitario costante che individuano un asse orientato fisso, attorno a cui ogni particella gira descrivendo una traiettoria circolare, normale all'asse, e col centro sull'asse stesso, con valore $v = \omega r$ della velocità, se r designa la distanza di P dall'asse. Se ω è indipendente da P si tratta di rotazioni rigide, altrimenti non può essere che funzione di r, oltre che del tempo t (nei moti variabili), e deve soddisfare alla seguente equazione differenziale [2]

$$\nu r\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial r^3} + \frac{5}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) = 0, \tag{2}$$

ν essendo una costante che ha il significato di rapporto fra il coefficiente di viscosità e la densità della massa fluida. Introducendo la funzione

$$\Omega = 2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r}, \tag{3}$$

[1] Questi Rendiconti, vol. XXXIII, pag. 161.
[2] Loc. cit., n. 5 (13).

legata al vettore $\mathbf{v}$ dalla notevole relazione (1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega \mathbf{k},$$

la (2) si trasforma nella s guente equazione:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Vogliamo ora occuparci dell'integrazione di queste equazioni.

Dalle (3) e (4) consegue la seguente relazione (2):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{c'(t)}{r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial t}, \tag{5}$$

dove $c'(t)$ designa la derivata rispetto a t di un'arbitraria funzione di t; essa ci sarà utile per ricavare ω, una volta determinata la funzione Ω.

2. *Moti permanenti.* — Si consideri dapprima ω e Ω indipendenti dal tempo t: la (2) diviene

$$\frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{5}{r}\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{3}{r^2}\frac{d\omega}{dr} = 0,$$

la cui soluzione generale è

$$\omega = A + \frac{B}{r^2} + C \log r, \tag{6}$$

A, B, C designando costanti arbitrarie. Conseguentemente, per la (3), si ha

$$\Omega = 2A + C + 2C \log r, \tag{7}$$

che (per Ω indipendente da t) è integrale generale della (4).

La (6), interpretata cinematicamente, esprime che il moto risulta della composizione: di una rotazione di insieme di velocità angolare A, di un moto irrotazionale di potenziale di velocità (non uniforme) B arctg y/x, infine di un moto rotatorio di velocità angolare C log r (3).

Soluzioni finite per $r = 0$ (che interessano quando l'asse di rotazione attraversa la massa fluida) si hanno solamente assumendo $B = C = 0$; si hanno allora le sole rotazioni rigide. È però degna di rilievo, tra le soluzioni che vanno considerate fino al valore zero di r, quella che si ottiene assumendo solamente $B = 0$, perchè a malgrado per essa divenga logaritmi-

(1) Loc. cit., n. 6.

(2) Loc. cit., n. 7.

(3) Il Lamb [*Hydrodynamics*, art. 333, pag. 580] considera un caso di moto rotatorio permanente composto delle prime due rotazioni soltanto; non mi consta che la terza sia stata messa in rilievo.

camente infinita la rotazione per $r = 0$, pur tuttavia il valore

$$v = r\omega = Ar + Cr \log r$$

della velocità si annulla per $r = 0$.

3. *Moti variabili.* — Secondo un classico procedimento, cerchiamo soluzioni della (4) del tipo

$$\Omega = T \cdot R , \tag{8}$$

dove T designa funzione della sola t e R della sola r; indicando con punti le derivazioni, la (8) portata in (4) dà luogo alla equazione

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\nu}{R}\left(\ddot{R} + \frac{1}{r}\dot{R}\right). \tag{9}$$

Essendo il primo membro indipendente da r e il secondo membro indipendente da t, indicando con h una costante reale qualsiasi, la precedente equazione si scinde nelle due seguenti:

$$\frac{\dot{T}}{T} = -h^2 \quad , \quad \ddot{R} + \frac{1}{r}\dot{R} + \frac{h^2}{\nu} R = 0 \ (^1). \tag{10}$$

Integrando la prima si ottiene

$$T = T_0 e^{-h^2 t}, \tag{11}$$

con T_0 costante arbitraria. La seconda è l'equazione differenziale delle funzioni cilindriche di ordine zero, e l'integrale generale è

$$R = R_0 J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) + R_0' Y_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right), \tag{12}$$

con R_0 e R_0' costanti arbitrarie e J_0 e Y_0 rappresentano le funzioni cilindriche rispettivamente di Bessel e di Neumann, esprimibile quest'ultima mediante la prima nel modo seguente (2):

$$Y_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) = \frac{2}{\pi} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) \int \frac{dr}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}}}. \tag{13}$$

(1) Si è volutamente messo in rilievo che il secondo membro della prima di queste equazioni è negativo; il caso opposto non ha interesse fisico inquantochè darebbe per T [cfr. la (11)] un fattore esponenziale crescente indefinitamente col tempo t.

(2) Cfr. Nielsen, *Cylinderfunktionen* [Leipzig, 1904], pag. 44.

Per le (11), (12) e (13), la (8) può scriversi

$$(14) \qquad \Omega = e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\left\{ C_1 + C_2 \int \frac{dr}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}}}\right\},$$

indicando ora C_1 e C_2 costanti arbitrarie.

Dalla (5), tenendo conto della (3), si deduce la seguente espressione per ω:

$$(15) \qquad \omega = -\frac{c(t)}{r^2} + \frac{\sqrt{\nu}}{hr} e^{-h^2 t} \times$$

$$\times\left\{ J_1\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\left[C_1 + C_2 \int \frac{dr}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}}}\right] + \frac{C_2}{r\left[J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^{\frac{2h}{\sqrt{\nu}}-1}}\right\},$$

essendo $J_1 = -J_0'$.

4. *Soluzioni finite per $r = 0$ e in campi limitati.* — Queste condizioni interessano il moto rotatorio di masse fluide limitate quando l'asse fisso, attorno a cui girano, attraversa le masse stesse. Bisogna assumere $C_2 = c(t) = 0$, con che la (14) e la (15) divengono rispettivamente:

$$(16) \qquad \Omega = C_1 e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) \quad , \quad \omega = \frac{C_1 \sqrt{\nu}}{hr} e^{-h^2 t} J_1\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right).$$

A ogni valore reale di h corrisponde una soluzione particolare, si può anzi dire a ogni valore reale e positivo, inquantochè risulta dalle precedenti espressioni di Ω e di ω che esse rimangono immutate cambiando di segno a h. Data la natura lineare e omogenea della equazione (4), alla quale deve soddisfare Ω, è pure integrale della (4):

$$(17) \qquad \Omega = \int_0^\infty f(h)\, e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) dh + \Omega',$$

quale si sia la funzione $f(h)$, naturalmente purchè tale da assicurare la integrabilità della funzione integranda nell'intervallo indicato, e indicando Ω' l'integrale corrispondente ai moti permanenti [n. 2], che nel caso attuale (moto regolare anche per $r = 0$) si riduce a una costante.

Si può sfruttare l'arbitrarietà di $f(h)$ per determinare la soluzione corrispondente ad assegnate condizioni iniziali, in modo preciso, assegnando i valori delle velocità iniziali dei punti della massa fluida rotante.

Sia, per $t = 0$,

$$(18) \qquad v = v_0(r),$$

la relazione che definisce la distribuzione delle velocità all'istante iniziale. Dalla (1) si ha, per $t = 0$,

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r}, \tag{19}$$

e, per la (3),

$$\Omega_0 = \frac{v_0}{r} + \dot{v}_0, \tag{20}$$

designando $\dot{v}_0$ la derivata di v_0. Questa formula definisce i valori iniziali di Ω, nota la distribuzione iniziale delle velocità. La questione è ora ridotta ad assegnare alla arbitraria funzione $f(h)$, che compare nella (17), una espressione tale che sia $\Omega = \Omega_0$ per $t = 0$. Basta, a tal uopo, assumere

$$f(h) = \frac{h}{\nu} \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] \, J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr', \tag{21}$$

con che la (17) diviene

$$\Omega(r,t) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty e^{-h^2 t} J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) h \, dh \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr' + \Omega'. \tag{22}$$

Infatti, ponendo in questa $t = 0$, si ottiene

$$\Omega(r,0) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty J_0\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) h \, dh \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr' + \Omega';$$

il secondo membro, per una nota identità [1], eguaglia $\Omega_0(r)$, c. v. d.

Per la (22) si può determinare ω per mezzo della (5): tenendo conto della (3), che ω deve mantenersi finita per $r = 0$ e notando che $J_0' = -J_1$, si ottiene

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot r} \int_0^\infty e^{-h^2 t} J_1\left(\frac{hr}{\sqrt{\nu}}\right) dh \int_0^\infty [\Omega_0(r') - \Omega'] J_0\left(\frac{hr'}{\sqrt{\nu}}\right) r' \, dr' + \frac{\Omega'}{2}. \tag{23}$$

Risulta che il comportamento assintotico, per $t = \infty$, è la rotazione rigida di velocità angolare $\frac{1}{2}\Omega'$.

[1] Cfr. Nielsen, loc. cit., pag. 363, formula (17).

Fisica. — *Limiti e condizioni di una buona ricezione in radiotelefonia.* Nota del Socio O. M. Corbino [1].

In una Memoria del 1905 [2] ebbi ad esaminare le proprietà spettroscopiche della luce omogenea avente una intensità periodicamente variabile, corrispondente a una espressione analitica del tipo

$$s = \varphi(t) \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

dove $\varphi(t)$ che rappresenta l'ampiezza dello spostamento luminoso varia con un periodo T grandissimo rispetto a quello $\frac{2\pi}{\omega}$ della vibrazione luminosa.

Si tratta cioè, come si direbbe in termini divenuti frequenti dopo la scoperta della radiotelefonia, di un'onda « modulata ».

La funzione s che rappresenta la vibrazione può essere scomposta analiticamente dando luogo, per $\varphi(t) = \mathrm{A} \cos \gamma t$, alla espressione

$$s = a \operatorname{sen} \omega_1 t + a \operatorname{sen} \omega_2 t$$

dove si ha

$$a = \frac{\mathrm{A}}{2} \quad ; \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \quad ; \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \gamma .$$

Ciò significa che la vibrazione ad ampiezza variante sinusoidalmente è decomponibile in due vibrazioni di ampiezza costante e di periodo leggermente diverso da quello della vibrazione primitiva. È l'inversione del fenomeno dei battimenti, per il quale si ottiene un suono unico di intensità periodicamente variabile per effetto della sovrapposizione di due suoni di frequenza diversa. E perciò se la luce è costituita da una vibrazione omogenea di ampiezza variabile sinusoidalmente, e la si osserva con uno spettroscopio di sufficiente potere separatore, al posto della riga luminosa corrispondente alla luce di ampiezza costante si osserverà una doppietta costituita da due righe simmetricamente disposte rispetto alla riga primitiva.

Al variare del periodo di modulazione, cioè del periodo di $\varphi(t)$, si allontanano o si avvicinano le componenti della doppietta, che saranno tanto più distanti quanto più elevata è la frequenza modulatrice di $\varphi(t)$.

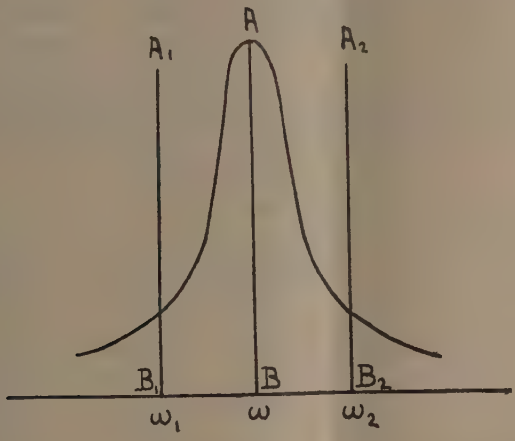
Altri modi di scomposizione della (I) furono allora esaminati, per lo studio di alcuni casi speciali; ma allo scopo della presente Nota basta il

[1] Presentata nella seduta del 4 novembre 1923.

[2] Rend. Lincei, vol. XIV, 1° sem., pag. 332 (1905).

richiamo sopra riportato; esso ci permetterà di fare alcune considerazioni degne di nota sulle condizioni e sui limiti di una buona ricezione radiotelefonica.

Invero l'onda elettrica emessa da un'antenna radiotelefonica, e ottenuta per modulazione a mezzo di un microfono di onde persistenti, può essere rappresentata dalla (I). L'apparecchio ricevitore, attraverso a una serie di amplificatori, è in fondo un sistema oscillante perfettamente accordato con l'onda *non modulata*, di pulsazione ω. Esso risponderà con intensità mutevole secondo la curva di risonanza alle onde di frequenza diversa da $\frac{\omega}{2\pi}$.



Ma poichè la trasmissione radiotelefonica implica necessariamente l'intervento della modulazione, cioè dell'ampiezza variabile $\varphi(t)$, non è più un'onda sinusoidale che arriva sul ricevitore e in risonanza con questo, ma due onde distinte di ampiezza costante, e di periodo diverso da quello di risonanza. E se le due onde (che per l'analogia con l'ottica chiamerò le componenti della doppietta) sono molto lontane, e quindi non impegnano il ricevitore sintonico nella zona di grande sensibilità per risonanza, ne risulterà una scarsa e in taluni casi una praticamente nulla sensibilità di audizione, pur essendo il ricevitore perfettamente accordato all'onda non modulata del trasmettitore.

Sia la curva di risonanza del ricevitore quella della fig. 1.

Nelle condizioni di perfetta sintonia la posizione della riga rappresentativa dell'onda non modulata è la centrale A B corrispondente alla pulsazione ω; per essa si ha la risonanza massima. Ma intervenendo la modulazione l'onda incidente si scinde in due di pulsazioni ω_1, e ω_2, rappresentate dalle righe $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ e per esse la capacità di ricezione nel ricevitore è no-

tevolmente minore. Dipendentemente dalla ampiezza dell'intervallo $B_1 B_2$, cioè di $\omega_2 - \omega_1$, e perciò della frequenza f del suono modulatore

$$\left(f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right),$$

e in relazione alla maggiore o minore acutezza della curva di risonanza si potrà avere una buona o una cattiva ricezione.

Dalla esistenza teorica dell'effetto discusso non si può dubitare dopo quanto si è detto. Rimane solo da ricercare se l'effetto si produrrà praticamente in misura apprezzabile. e quali ne saranno le manifestazioni.

Il circuito ricevitore, di resistenza r, self L e capacità C, presenterà alle onde di frequenza generica ν una resistenza apparente

$$R = \sqrt{r^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}$$

con una frequenza di risonanza N tale che

$$N^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}.$$

Poichè l'alterazione della frequenza è lieve, ponendo

$$\nu = N + n$$

sarà n piccolissimo rispetto a N; ne risulta

$$R = \sqrt{r^2 + 16\pi^2 L^2 n^2}$$

e perciò la resistenza per l'onda $N + \nu$ sarà rispetto a quella minima r di risonanza in un rapporto m dato da

$$(2) \qquad m = \frac{R}{r} = \sqrt{1 + 16\pi^2 \frac{L^2}{r^2} n^2}.$$

Si osservi, d'altra parte, che se il suono modulatore ha una certa frequenza f, le due componenti sinusoidali dell'onda modulata avranno fra loro una differenza f fra le rispettive frequenze, e una differenza $\frac{f}{2}$ fra la frequenza di ciascuna e quella dell'onda modulata. Per esempio, se il suono modulatore ha una frequenza di 1000, si avrà per la formola (2)

$$m = \sqrt{1 + 16\pi^2 \frac{L^2}{r^2} \cdot 500^2}.$$

Viceversa, poichè si deduce dalla (2)

$$n = \sqrt{m^2 - 1}\,\frac{r}{4\pi L},$$

si può calcolare per quale frequenza f del suono modulatore si ha un accrescimento di m volte nella resistenza del ricevitore, cioè una riduzione a $\frac{1}{m}$ della sua sensibilità.

Si ottiene

$$f = 2n = \sqrt{m^2 - 1}\,\frac{r}{2\pi L}.$$

Pertanto se la bobina del ricevitore ha una resistenza di 0,2 ohm e la self di 500 microhenry, la sensibilità sarà ridotta a metà ($m = 2$) per

$$f = \text{circa } 160 \text{ per secondo.}$$

La riduzione di sensibilità sarà più notevole per frequenze più alte del suono modulatore: così per un suono di 1000 vibrazioni la sensibilità si ridurrebbe a circa un sedicesimo e perciò i suoni più acuti saranno più difficilmente sentiti, e per i suoni non semplici gli armonici di grado elevato saranno più fortemente ridotti, con alterazione del timbro e difficoltà di percepire le parole. Invece l'effetto sarà attenuato se si ricorre a ricevitori con self non elevata, ciò che avviene più facilmente qualora la frequenza dell'onda di sostegno sia alquanto elevata.

Da ciò la convenienza, che la pratica ha già riconosciuto, di trasmettere con onde quanto più corte è possibile.

Risulta inoltre che l'audizione sarà migliorata rendendo, in ogni caso, meno acuta la curva di risonanza del ricevitore, cioè (a parità di resistenza ohmica e di lunghezza d'onda) accrescendo la capacità e diminuendo la self del risonatore. Anche questa conseguenza sembra conforme ai risultati della pratica.

Ritengo che le considerazioni esposte in questa Nota, e che per le mie attuali condizioni non posso controllare se siano del tutto nuove, vadano tenute presenti nell'esame delle varie singolarità che presenta praticamente la radiotelefonia.

Zoologia. — *Sul differente ritmo di divisione dei micronuclei durante la coniugazione vera in Cryptochilum Echini Maupas.* Nota del Corrisp. ACHILLE RUSSO.

I due gameti, che si accoppiano per formare la coniugazione vera (1) in *Cryptochilum echini*, sono uguali per forma e per grandezza del loro corpo cellulare, ma se ne distinguono per la forma dei loro micronuclei e per la diversa quantità di sostanza nucleare in essi contenuta. Di tali differenze, che rendono i due gameti sostanzialmente diversi, mi sono occupato in altra Nota (2), ma, per la maggiore intelligenza dei fatti, che mi propongo qui esporre, ripeto che uno dei gameti ha il micronucleo di forma globulare, mentre l'altro lo ha sotto forma di virgola, con una parte ingrossata, in cui è raccolta la cromatina, ed una parte affilata, che ne è priva. Ciascuno di tali micronuclei, per il modo di costituirsi, contiene una quantità diversa di sostanza nucleare, poichè quello a forma di globulo si origina dal micronucleo di un *gametogene*, che, nel dividersi, forma fra i due nuclei figli un filo di sostanza nucleare, che si colora intensamente in nero con le sopracolorazioni all'ematossilina ferrica, e che, essendo rigettato, viene riassorbito dal protoplasma; mentre quello a forma di virgola si costituisce per divisione del micronucleo di un altro *gametogene*, che si allunga e si assottiglia nel mezzo, dividendosi senza lasciare alcun residuo, per cui i due nuclei figli conservano la forma caratteristica di una virgola.

Per quanto sopra fu esposto, i due gameti della copula vera in *Cryptochilum* debbono ritenersi già differenziati sessualmente prima del loro accoppiamento e quindi, in questo caso almeno, anche per il particolare svolgimento del processo di coniugazione, non potrebbe affermarsi, come fu descritto in altri Ciliati, che il differenziamento sessuale avvenga nei micronuclei in uno stadio avanzato della coniugazione e propriamente con la 3ª mitosi, mediante la quale si forma il cosidetto *nucleo migrante* o maschile ed il *nucleo stazionario* o femminile.

(1) In *Cryptochilum* ho distinto tre diverse forme di coniugazione, una delle quali ho denominata *vera* o principale, le due altre *false* o accessorie. Cfr. A. Russo, *Sul ciclo di sviluppo del Cryptochilum Echini* Maupas. Atti Accad. Gioenia di Sc. naturali, Catania, 1914, serie V, vol. VII.

(2) *Il differenziamento dei gameti in Cryptochilum Echini Maupas.* Monitore zoologico italiano, anno XXVII, n. 3-4, 1916.

Durante la coniugazione vera di *Cryptochilum* i due micronuclei, che, come fu detto, sono già differenziati fin dal loro primo costituirsi, si comportano diversamente non solo per la maniera speciale di dividersi, ma anche perchè le fasi della loro divisione non sono contemporanee, essendo più rapide in quello globulare. Tale constatazione rende, a mio parere, più evidente il fatto che i due gameti sono già sessualmente diversi prima di accoppiarsi.

Il micronucleo a forma globulare inizia per primo la divisione con un processo mitotico quasi ordinario, in quanto che, in un primo momento, la massa nucleare si allunga e la cromatina, conformata in granuli o bastoncelli, si porta ai due poli. In uno stadio successivo, mentre la figura mitotica si allunga sempre più, la cromatina si condensa ai due estremi, dove si costituiscono due nuovi nuclei globulari, i quali restano uniti da un filamento, che si mette in evidenza solo con la sopracolorazione all'Ematossilina ferrica. Tale formazione nucleare si dispone secondo l'asse maggiore del gamete a lato del macronucleo. I due primi nuclei così formatisi, liberandosi dal filamento che li univa, alla loro volta ben presto si dividono, formando due coppie di nuclei, riuniti da un filo connettivale, che si dispongono entrambe secondo l'asse maggiore del gamete.

Per la posizione così assunta dai nuclei delle due coppie, uno di essi trovasi nella regione anteriore, nell'area protoplasmatica in cui i due gameti si toccano. Questo nucleo si porta in seguito nel gamete vicino, per cui può ben chiamarsi *nucleo migrante*. Degli altri tre nuclei, quello appartenente alla stessa coppia e che trovasi nella regione posteriore, essendosi osservato spesso a contatto del macronucleo, pare con esso si fonda, ma, in ogni caso, viene sempre riassorbito dal protoplasma; gli altri due nuclei, che formano l'altra coppia, permangono invece come *nuclei stazionarii*, per costituire in seguito due dei quattro nuclei dell'apparato nucleare dell'*individuo misto*, che si formerà dall'ex-coniugante (1).

Il micronucleo a forma di virgola, nel gamete opposto, si comporta in modo affatto diverso, sia per la maniera speciale di dividersi, sia perchè gli stadi della sua divisione sono sempre in arretro rispetto a quelli che si avverano nel micronucleo a forma di globulo.

In un primo momento, il micronucleo virgoliforme perde la parte sottile e, conservando quella ingrossata ed affusata, si circonda di un vacuolo. Successivamente si costituisce un fuso di filamenti acromatici quasi paralleli, sui quali è sparsa la cromatina, disposta in granuli. I fili di tale fuso ben presto si ripartiscono in due fasci quasi uguali fra loro e paralleli, che

(1) Il nucleo che viene riassorbito dal protoplasma non è sempre quello della coppia, che fornisce il *nucleo migrante*. Esso può appartenere all'altra coppia, come si vede in I della figura annessa.

per qualche tempo restano l'uno accanto all'altro. Nell'ulteriore processo divisorio i due fasci di fili nucleari si allontanano, rimanendo però uniti a mezzo di lacinie di sostanza nucleare. I due nuovi nuclei conservano nelle fasi ulteriori la forma fusata, sono sempre uniti da un sottilissimo filo connettivo e si dispongono lungo l'asse del gamete, per cui uno di essi si situa in alto nell'area protoplasmatica limitrofa col gamete opposto. In tale stadio, cioè dopo una sola divisione nucleare, il nucleo posto anteriormente emigra nel gamete vicino, attraversando il setto divisorio. Il nucleo posto nella regione posteriore, che rimane nel gamete come *stazionario*, compie una 2ª divisione quando i due coniuganti si sono staccati tra loro, per l'avvenuto scambio dei nuclei migratori, quando cioè sono passati allo stato di ex coniuganti. Nell'ultimo stadio delle trasformazioni nucleari, che si avverano in entrambi i gameti durante la loro unione, risulta invece che, mentre in quello con micronucleo globulare si sono costituiti, per due divisioni successive, quattro nuclei, in quello che lo ha virgoliforme, per un arretro del processo divisorio, se ne costituiscono soltanto due di forma fusata.

I nuclei migratori, penetrando ciascuno nel gamete opposto, non si uniscono ad alcuno dei nuclei stazionari in essi preesistenti e formatisi, come si è detto, per divisione del micronucleo globulare o di quello virgoliforme. Tali nuclei migrati hanno ben altra funzione e si comportano in modo diverso dentro il protoplasma del nuovo individuo, in cui sono penetrati, rivelando anche in questo stadio una diversa attività divisionale, correlativa alla loro origine. Il nucleo migrato, proveniente dall'originario micronucleo globulare, compie, difatti, nel nuovo individuo in cui è penetrato, una 3ª mitosi, mentre quello, che deriva dal micronucleo virgoliforme, compie la 2ª divisione.

Per tali fatti i due *individui misti*, che si costituiranno dai due ex coniuganti, hanno una composizione nucleare diversa, come esporrò più estesamente in altra Nota.

Ritengo opportuno infine mettere in evidenza la relazione esistente in *Cryptochilum* tra l'eliminazione della sostanza nucleare, l'accelerazione delle divisioni ed il numero delle divisioni stesse che i nuclei dei due gameti sono capaci di compiere in un tempo determinato.

Il micronucleo globulare, derivando dal nucleo di un gametogene, che emette parte del suo contenuto, compie tre divisioni prima che si costituisca l'apparato nucleare dell'individuo misto; mentre quello virgoliforme, che deriva da un gametogene, il cui nucleo nel dividersi non perde alcuna parte del suo contenuto, si divide più lentamente e compie due divisioni prima di raggiungere lo stesso stadio.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les différentielles secondes et la dérivation des tenseurs.* Nota di PAUL DIENES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. L'application du Calcul Tensoriel à la réalité physique implique une correspondence entre les tenseurs et les quantités géométrico physiques. D'habitude, un tenseur contravariant est assimilé à une direction c'est à dire, en dernière analyse, à un élément linéaire local. Par conséquent, le transport du tenseur dx^k dans une direction arbitraire δx^k nous conduit à considérer des différentielles mixtes δdx^k comme déterminées par dx^k, δx^k et par la nature du milieu où le transport est effectué.

C'est M. Levi-Civita [1] qui a commencé dans un récent mémoire l'étude systématique de telles relations ayant en vue la généralisation de la dérivation des tenseurs. Dans la présente Note nous voulons contribuer à cette étude en montrant que si, au lieu de la dérivation « partielle » c'est à dire par rapport à x^k, on considère la dérivation des tenseurs *le long d'une courbe*, on peut établir des relations assez générales entre les différentielles secondes, la dérivations et le transport des tenseurs.

2. Considérons les équations

$$\delta l x^k + f^k(dx^* \mid \delta x^*) = 0 , \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{2·1}$$

où les fonctions f^k sont homogènes d'ordre un en $dx^1, \dots, dx^n$ de même qu'en $\delta x^1, \dots, \delta x^n$ parceque δdx^k est, par définition, une quantité de second ordre et où l'astérisque indique que l'indice en question disparaît dans la sommation impliquée dans f^k.

Transformons les coordonnées d'après les équations

$$x^k = \tau^k(\xi^1, \dots, \xi^n) \quad , \quad \xi^\alpha = \iota^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

et posons

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\alpha} = \tau^k_\alpha \ , \ \frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^\alpha \, \partial \xi^\beta} = \tau^k_{\alpha\beta} \ , \ \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} = \iota^\alpha_k \ , \text{ etc.}$$

Il en résulte que

$$\delta dx^k = \tau^k_{\alpha\beta} \, d\xi^\alpha \, \delta\xi^\beta + \tau^k_\alpha \, \delta d\xi^\alpha$$

[1] T. Levi-Civita, *Diferenciales segundas que se comportan de modo invariantivo.* Revista Matemática Hispano-Americana, 1923, vol. V, pp. 165-176.

c'est à dire, si l'on désigne par $\varphi^\alpha(d\xi^*|\delta\xi^*)$ les fonctions qui correspondent à $f^k(dx^*|\delta x^*)$,

$$(2\cdot2)\qquad f^k(\tau^*_\alpha\, d\xi^\alpha|\tau^*_\alpha\,\delta\xi^\alpha) = -\tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\,\delta\xi^\beta + \tau^k_\alpha\,\varphi^\alpha(d\xi^*|\delta\xi^*),$$

où

$$(2\cdot3)\qquad \bar\varphi^r(d\xi^*|\delta\xi^*) = t^r_k\,\tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\,\delta\xi^\beta + t^r_k\, f^k(\tau^*_\alpha\, d\xi^\alpha|\tau^*_\alpha\,\delta\xi^\alpha).$$

Les relations (2·2) et (2·3) sont la généralisation de la transformation des symboles à trois indices de Christoffel.

Plus généralement, posons

$$(2\cdot4)\qquad \delta dx^k + f^k(dx^*, d^2x^*, \dots, d^mx^*|\delta x^*) = 0$$

où les fonctions f^k sont homogènes de degré μ_i en $d^ix^1, \dots, d^ix^n$ et $\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m = 1$.

La relation (2·3) sera remplacée par

$$(2\cdot5)\qquad \varphi^r(d\xi^*, d^2\xi^*, \dots, d^m\xi^*|\delta\xi^*) =$$
$$= t^r_k\,\tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\,\delta\xi^\beta + t^r_k\, f^k(\tau^*_\alpha\, d\xi^\alpha, \tau^*_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta + \tau^*_\alpha\, d^2\xi^\alpha, \dots|\tau^*_\alpha\,\delta\xi^\alpha).$$

3. La translation d'un tenseur le long d'une courbe. — Considérons la courbe $x^k(t)$ et posons $dx^k = \dfrac{dx^k}{dt}\,dt = \dot x^k\,dt$ et remplaçons δx^k par A^k. Les équations (2·1) s'écrivent

$$(3\cdot1)\qquad \frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot x^*|A^*) = 0.$$

Ces équations correspondent à celles de M. Levi-Civita pour le déplacement parallèle d'un tenseur contravariant le long d'une courbe donnée (1). Le cas $\delta = d$ nous donne

$$(3\cdot2)\qquad \frac{d^2x^k}{dt^2} + f^k(\dot x^*|\dot x^*) = 0.$$

Les courbes déterminées par ce système peuvent être appelées géodésiques ou courbes fondamentales. Comme $A^1, \dots, A^n$ déterminent une direction, le système (3·1) définit le transport d'une direction ou, si l'on veut, celui des courbes géodésiques le long de la courbe donnée.

(1) T. Levi-Civita. *Nozioni di parallelismo in una varietà qualunque* etc. [Rendiconti di Palermo, t. XLII (1917), pp. 173-205].

Si les fonctions f^k satisfont à la condition de Lipschitz, le système (3·1) admet une seule solution $A^1(t), \ldots, A^n(t)$ telle que $A^k(t_0) = A_0^k$ où A_0^k sont données arbitrairement.

La même remarque, appliquée au système (2·4), nous conduit aux équations

$$\frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \ldots, \overset{[m]}{x^*} | A^*) = 0 \tag{3·3}$$

qui déterminent un déplacement d'un genre très général le long de la courbe.

4. La dérivation tensorielle généralisée. — Nous définissons la dérivée tensorielle de A^k le long de la courbe $x^k(t)$ en posant

$$\frac{DA^k}{Dt} = \frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^* | A^*). \tag{4·1}$$

Nous justifions cette définition par la remarque (aisée à vérifier) que le second membre est un tenseur contravariant, c'est à dire que

$$\frac{DA^k}{Dt} = \frac{D\overline{A}^\alpha}{Dt} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\alpha}. \tag{4·2}$$

La dérivation est donc « covariante ». Remarquons que, en général, on ne peut pas en déduire une dérivation partielle par rapport à x^k, parcequ'on ne peut pas grouper les termes de $f^k(\dot{x}^* | A^*)$ de façon que chaque groupe contienne une seule des quantités $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$. Ce groupement n'est possible que si f^k est linéaire en $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ ce qui entraîne qu'il est linéaire aussi en $A^1, \ldots, A^n$, à supposer cependant qu'on se tient à la relation $d\delta x^k = \delta dx^k$. C'est le cas envisagé par M. Levi-Civita [1] dans son mémoire classique, légèrement généralisé par M Weyl [2].

On peut poser plus généralement

$$\frac{DA^k}{Dt} = \frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \ldots, \overset{[m]}{x^*} | A^*) \tag{4·3}$$

et on voit facilement que cette dérivée est un tenseur contravariant.

5. Formule de l'accroissement fini. — Pour faire voir que le rôle joué dans le Calcul Tensoriel, par la dérivée ainsi définie est très semblable à celui joué par la dérivée dans le Calcul Différentiel ordinaire, nous allons démontrer un théorème qui nous paraît fondamental aussi dans les applications géométriques des tenseurs.

Considérons une ligne de tenseurs $A^k(t)$, c'est à dire les tenseurs $A^k(t)$ attachés aux points successifs d'une courbe donnée $x^k(t)$. Fixons t et dépla-

(1) Loc. cit.

(2) H. Weil, *Raum, Zeit, Materie.* 3-te Aufl., p. 100.

çons $A^k(t)$, au moyen des équations (3·1) [ou (3 3)], le long de $x^k(t)$, de t à t_0. Le résultat, $A^k(t \mid t_0)$, est un tenseur attaché à t_0. Comme ce tenseur varie avec t, nous aurons à t_0 une famille de tenseurs à un paramètre. Posons

$$F^k(t) = A^k(t \mid t_0).$$

Nous avons

$$F^k(t) = F^k(t_0) + \left(\frac{dF^k}{dt}\right)_{t_0}(t_0 - t_0) + M(t - t_0)^2$$

où M est borné au voisinage de t_0.

Les équations (3·1) écrites sous forme d'équations intégrales, nous donnent

$$(5\cdot1)\quad F^k(t) = -\int_t^{t_0} f^k[\dot{x} \mid A^*(t \mid \tau)]\, d\tau + A^k(t) \quad , \quad \dot{x}^k = \frac{dx^k}{d\tau}$$

de sorte que $F^k(t_0) = A^k(t_0)$. Puis

$$(5\cdot2)\quad \frac{dF^k}{dt} = f^k[\dot{x}^* \mid A^*(t)] - \int_t^{t_0} \frac{df^k}{dt}\, d\tau + \frac{dA^k}{dt} = \frac{DA^k}{Dt} - \int_t^{t_0} \frac{df^k}{dt}\, d\tau$$

ce qui donne

$$(5\cdot3)\quad \left(\frac{dF^k}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{DA^k}{Dt}\right)_{t_0}$$

c'est à dire

$$(5\cdot4)\quad A^k(t \mid t_0) - A^k(t_0) = \left(\frac{DA^k}{Dt}\right)_{t_0}(t - t_0) + \mu(t - t_0)^2$$

où μ, comme M et $\left|\frac{df^k}{dt}\right|$, est borné au voisinage de t_0. Cette formule montre que la dérivation tensorielle le long d'une courbe correspond bien à l'opération analogue de l'Analyse ordinaire.

Remarquons qu'on déduit de même de (5·2) que

$$(5\cdot5)\quad \lim_{t_0 \to t} \frac{dA^k(t \mid t_0)}{dt} = \frac{DA^k(t)}{Dt}.$$

On peut interpréter les équations (5·3) de la manière suivante. La translation (3·1) établit une correspondence entre les tenseurs d'une ligne tensorielle et des tenseurs attachés au point t_0. Les tenseurs $A^k(t)$ de la ligne tensorielle sont pour ainsi dire représentés à t_0 par les tenseurs $A^k(t \mid t_0)$ qui leur correspondent. La dérivation ordinaire, c'est à dire locale, en t_0, des fonctions $A^k(t \mid t_0)$ par rapport au paramètre t est pour ainsi dire défigurée en dérivation tensorielle si l'on considère ces fonctions comme des composants tensoriels replacés à leurs places originelles.

6. Formule de Taylor. — Si les fonctions f^k sont linéaires [1] (et nécessairement homogènes) en $A^1, \ldots, A^n$, nous avons

$$(6\cdot1)\qquad A^k(t\,|\,t_0) = -\int_t^{t_0} f^k_{0i}(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \ldots)\, A^i(t\,|\,\tau)\, d\tau + A^k(t)\ ,\quad \dot{x} = \frac{dx^k}{d\tau} \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$(6\cdot2)\qquad \frac{dA^k(t\,|\,t_0)}{dt} = \frac{DA^k(t)}{Dt} - \int_t^{t_0} f^k_{0i}\, \frac{dA^i(t\,|\,\tau)}{dt}\, d\tau\ ,$$

et on peut établir (sous des conditions des dérivabilités etc., tout à fait analogues à celles du calcul ordinaire) soit *la formule de Taylor des tenseurs déplacés*

$$(6\cdot3)\qquad A^k(t\,|\,t_0) = A^k(t_0) +$$

$$+\left(\frac{DA^k}{Dt}\right)_{t_0}(t-t_0) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\frac{D^m A^k}{Dt^m}\right)_{t_0}(t-t_0)^m + R_{m+1}$$

avec

$$(6\cdot4)\qquad R_{m+1} = \frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}\left[\frac{D^{m+1}A^k}{Dt^{m+1}} - \int_t^{t_0} f^k_{0i}\, \frac{d^{m+1}A^i(t\,|\,\tau)}{dt^{m+1}}\, d\tau\right]_{t+\theta(t-t_0)},$$

soit le développement en série

$$(6\cdot5)\qquad A^k(t\,|\,t_0) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{D^m A^k}{Dt^m}\right)_{t_0}\frac{(t-t_0)^m}{m!}\ .$$

La possibilité d'un tel développement dépend à la fois de la ligne tensorielle envisagée $A^k(t)$ et de la nature analytiques des fonctions $f^k_{0i}(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \ldots)$.

Tous ces résultats s'étendent aux tenseurs d'ordre et de type quelconque. Le cas où le nombre des paramètres est n nous amène au problème de la dérivation partielle. On arrive ainsi à la définition

$$(6\cdot8)\qquad \frac{DA^k}{Dx^i} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + f^k_{0i}(A^*)\quad ,\quad f^k_{0i}(A^*) = f^k\left(\frac{\partial x^*}{\partial x^i}\,|\,A^*\right).$$

On voit facilement que $f^k(\dot{x}^*\,|\,A^*)$ *doit être linéaire en* $\dot{x}^i$ *pour que la dérivée soit un tenseur de type* A^k_{0i}. Mais, comme les résultats des §§ 3-6 sont valables pour des fonctions f^k *quelconques*, ces fonctions peuvent être linéaires en $\dot{x}^i$ sans l'être en A^i. La dérivation le long d'une ligne paraît cependant être une notion plus générale et plus fondamentale que la dérivation partielle.

[1] Ce cas est traité en détail dans notre mémoire *Sur la structure mathématique du Calcul Tensoriel*, Journal de Mathématique 1924. Premier fascicule.

Matematica. — *Sul teorema di Weierstrass.* Nota di GIORGIO VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si sa come Weierstrass nel suo *Vorbereitungsatz* (Opere, tomo II), dimostrò quanto segue:

Sia data una funzione $F(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ di $n+1$ variabili, rappresentata da una serie multipla di potenze positive, convergente in un certo campo

$$D[|x_i| \leq r, |y| \leq \varrho]$$

la quale si annulla, per $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = y = 0$.

Indichiamo per semplicità il complesso delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, colla sola lettera x, ed ordiniamo secondo le potenze dell'argomento y, scrivendo

$$F(y|x) = B_0(x) + B_1(x)\, y + \cdots + B_n(x)\, y^n + \cdots ,$$

dove almeno $B_0(0) = 0$. Se per $x = 0$ abbiamo

$$B_0(0) = 0 , B_1(0) = 0 , \dots , B_{m-1}(0) = 0 , B_m(0) \neq 0 ,$$

il teorema di Weierstrass dice, che in un campo sufficientemente piccolo D', contenuto in D, la funzione $F(y|x)$ si può mettere sotto la forma

$$F(y|x) = Q(y|x)\, f(y|x) \tag{1}$$

dove Q è una funzione olomorfa in D', che non si annulla in tale campo, e $f(y|x)$ è un polinomio in y,

$$f(y|x) = y^m - p_1 y^{m-1} - p_2 y^{m-2} - \cdots - p_m ,$$

i cui coefficienti $p_1, p_2, \dots, p_m$, sono funzioni di x, olomorfe in D', e nulle per $x = 0$.

In D', dove $Q(y|x)$ non si annulla, l'equazione $F(y|x) = 0$ è equivalente all'equazione $f(y|x) = 0$: come dice Poincaré nella sua tesi, la funzione y, definita da $F(y|x) = 0$, nell'intorno di $y = x = 0$, è una funzione algebroide di grado m. Vogliamo dare una nuova dimostrazione del teorema di Weierstrass, la quale fornisce in pari tempo un metodo, per calcolare le funzioni $p_1, p_2, \dots, p_m$.

2. Per rendere più agile il nostro procedimento, ci converrà premettere qualche lemma algebrico. Prendiamo un polinomio in y di grado m:

$$f(y) = y^m - p_1 y^{m-1} - p_2 y^{m-2} - \cdots - p_m ,$$

risguardandovi per un momento $p_1, \ldots, p_m$ come variabili indipendenti.

Lemma I. Se prendiamo due potenze qualsiansi consecutive y^n, y^{n+1}, $(n \geq m)$ e facciamo le loro divisioni per $f(y)$, si ha

$$\begin{aligned} y^n &= q_{n-m} \; f(y) + r_n(y) \\ y^{n+1} &= q_{n+1-m} f(y) + r_{n+1}(y) , \end{aligned}$$

dove q_{n-m} e q_{n+1-m} sono polinomi in y di grado $n-m$ ed $n+1-m$, ed $r_n(y), r_{n+1}(y)$ sono polinomi di grado $m-1$ in y. Esplicitandoli sotto la forma

$$\begin{aligned} r_n(y) &= a_1^{(n)} \; y^{m-1} + a_2^{(n)} \; y^{m-2} + \cdots + a_m^{(n)} , \\ r_{n+1}(y) &= a_1^{(n+1)} y^{m-1} + a_2^{(n+1)} y^{m-2} + \cdots + a_m^{(n+1)} , \end{aligned}$$

si riconosce immediatamente che sussistono le relazioni

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1^{(n+1)} = a_1^{(n)} p_1 + a_2^{(n)} , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_h^{(n+1)} = a_1^{(n)} p_h + a_{h+1}^{(n)} , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m^{(n+1)} = a_1^{(n)} p_m ; \end{array} \right.$$

$$(3) \qquad q_{n+1-m} = y \, q_{n-m} + a_1^{(n)} .$$

Le relazioni (2) permettono di calcolare i coefficienti di $r_{n+1}(y)$, quando sono conosciuti quelli di $r_n(y)$. Si vede facilmente che i coefficienti di $r_n(y)$ sono polinomi nelle $p_1, \ldots, p_m$. Le relazioni ricorrenti (3) forniscono per q_{n-m} l'espressione esplicita

$$(3') \qquad q_{n-m} = y^{n-m} + p_1 y^{n-m-1} + a_1^{(m+1)} y^{n-m-2} + \cdots + a_1^{(n-1)} .$$

Lemma II. Se $|y| \leq \varrho$ e le p soddisfano le disuguaglianze

$$|p_1| \leq \frac{\varrho}{m} , \quad |p_2| \leq \frac{\varrho^2}{m^2} , \quad \cdots , \quad |p_m| \leq \frac{\varrho^m}{m^m} ,$$

risulta che

$$|r_n(y)| \leq \varrho^n \quad , \quad |q_{n-m}| \leq \frac{n\varrho^{n-m}}{m} .$$

Per dimostrarlo, osserviamo che, sotte le condizioni $|y_i| \leq \frac{\varrho^i}{m_i}$, si ottiene, senza difficoltà, dalle formule (2)

$$|a_i^{(m)}| \leq \frac{\varrho^{i-m+k}}{m^k} \qquad (i = 2, 2, \ldots, m).$$

Ma

$$r_k(y) = a_1^{(m)} y^{m-1} + a_2^{(m)} y^{m-2} + \cdots + a_m^{(m)}$$

$$y^{i-m} = y^{i-m} + y_1 y^{m-i} + a_2^{(m+1)} y^{m-m-1} - \cdots - a_m^{(i-1)}$$

sicchè

$$|y^{i-m}| \leq \varrho^i \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m^2} - \cdots - \frac{1}{m^m} \right) \leq \varrho^i$$

$$|y_{i-m}| \leq \varrho^{i-m} + \frac{\varrho^{i-m-1}\varrho}{m} + \cdots \frac{\varrho^{i-m}}{m}$$

$$\leq \varrho^{i-m} + \frac{i-m}{m} \varrho^{i-m} = \frac{i}{m} \varrho^{i-m}.$$

3. Ciò posto, ritorniamoci alle considerazioni e notazioni del n. 1.

Poichè $B_m(0) \neq 0$, possiamo moltiplicare $F(y, x)$ per $\frac{1}{B_m(0)}$. Ponendo altresì

$$\frac{B_m(x)}{B_m(0)} = 1 - A_m(x), \quad \frac{B_i(x)}{B_m(0)} = -A_i(x) \qquad (i \neq m),$$

$F(y, x)$ prende la forma

$$F(y, x) = y^m - A_1(x) - A_2(x) y - \cdots - A_m(x) y^m - \ldots.$$

dove

$$A_0(0) = 0, A_1(0) = 0, \ldots, A_m(0) = 0.$$

Facciamo la divisione di $F(y, x)$, considerata come serie di potenze di y, per $f(y)$, operazione che dà luogo, almeno formalmente, ad una identità del tipo

$$F(y, x) = Q(y, x) f(y) + R(y, x), \tag{4}$$

dove $Q(y, x)$ è una funzione della y e delle x, ed $R(y, x)$ un polinomio di grado $m-1$ in y, a coefficienti dipendenti dalle x. È essenziale di giu-

stificare la (4), precisando il comportamento delle funzioni Q ed R. le quali hanno evidentemente le seguenti espressioni:

$$Q(y|x) = 1 - \sum_{m}^{\infty}{}_n A_n q_{n-m},$$

$$R(y|x) = r_m(y) - \sum_{0}^{\infty}{}_n A_n r_n(y).$$

Si vede (lemma II) che, se $|p_i| \leq \frac{\varrho^i}{m^i}$, la serie che esprime $R(y\,x)$ è uniformemente convergente, nel campo $D(|x| \leq r, |y| \leq \varrho < 1)$, dove è convergente $F(y|x)$. Essa rappresenta perciò una funzione regolare, non soltanto della y e delle x, ma anche delle p nel campo

$$\Gamma\left(|x| \leq r,\ |y| \leq \varrho < 1,\ |p_i| \leq \frac{\varrho^i}{m^i}\right).$$

Si riconosce poi (lemma II) che anche $Q(y|x)$ è una serie uniformemente convergente nel campo Γ. Per $y = x = p = 0$, $Q(y\,x) = 1$.

Risulta che esiste un certo campo N compreso in Γ, nel quale $Q(y|x)$ non si annulla.

$R(y\,x)$ si può scrivere manifestamente sotto la forma

$$R(y\,x) = R_0(p\,x) + R_1(p|x)\,y + \cdots - R_{m-1}(p\,x)\,y^{m-1}.$$

4. Consideriamo adesso le m equazioni

$$(5)\qquad \begin{cases} R_0(p|x) = p_m - A_0 - \sum_{m}^{\infty}{}_n A_n a_m^{(n)} = 0, \\ R_1(p|x) = p_{m-1} - A_1 - \sum_{m}^{\infty}{}_n A\ a_{m-1}^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{m-1}(p|x) = p_1 - A_{m-1} - \sum_{m}^{\infty}{}_n A_n a_1^{(n)} = 0. \end{cases}$$

I primi membri di queste m equazioni hanno le seguenti proprietà:

a) Sono funzioni olomorfe nelle x e nelle p, in Γ.

b) Si annullano per $x = p = 0$.

c) Il loro determinante funzionale rispetto alle p, per $x = p = 0$, è uguale a 1.

Risulta senz'altro che queste m equazioni (nelle altrettante p e nelle x), sono atte a definire le p, come funzioni regolari delle x, nell'intorno di

$x = 0$, in un certo campo M compreso in Γ. Se prendiamo per le p le soluzioni di (5), la formula (4) diviene

$$F(y|x) = Q(y|x)\, f(y). \tag{4'}$$

Nella parte comune ai campi N [dove $Q(y|x)$ non s'annulla] ed M (dove sono definite le p come funzioni regolari delle x), l'equazione $F(y|x) = 0$ è equivalente a $f(y) = 0$.

Rimane così stabilito, riducendosi in sostanza al caso normale [le m equazioni (5), con altrettante incognite, a determinante funzionale non nullo] il teorema di Weierstrass.

5. Veniamo infine al complemento essenziale, già annunciato al n. 1, cioè al calcolo effettivo dei coefficienti p, quali funzioni delle x. Se vogliamo applicare il metodo di approssimazioni successive, nella forma specificata dal prof. Levi Civita [1], è necessaria una preventiva trasformazione lineare delle equazioni (5). Mettendo in evidenza nei loro secondi membri i termini lineari nelle p, queste si possono scrivere:

$$p_{m-h} = A_{m+1}\, p_{m-h+1} + A_{m+2}\, p_{m-h+2} + \cdots + A_{m+h}\, p_m + \varphi_{m-h} \tag{5'}$$

dove

$$\varphi_{m-h} = A_h + A_m\, p_{m-h} + \sum_{i=1}^{h} A_{m+i}\,(a_{m-h}^{(m+i)} - p_{m-h+i}) + \sum_{i=h+1}^{\infty} A_{m+i}\, a_{m-h}^{(m+i)}$$

ha la proprietà di essere almeno di secondo ordine nelle p, per $x = 0$.

Ove si ponga

$$B_0 = 1\ ,\ B_h = A_{m+1}\, B_{h-1} + A_{m+2}\, B_{h-2} + \cdots + A_{m+h-1} + A_{m+h}\, B_0$$

le (5') equivalgono ulteriormente alle

$$p_{m-h} = B_h\, \varphi_m + B_{h-1}\, \varphi_{m-1} + \cdots + B_1\, \varphi_{m-h+1} + B_0\, \varphi_{m-h} \tag{5''}$$

in cui tutti i secondi membri sono di secondo ordine almeno nelle p, per $x = 0$.

Poste le equazioni sotto questa forma, la effettiva determinazione delle funzioni p delle x si può fare materialmente, sia col Levi-Civita, per approssimazioni successive, lasciando le x indeterminate, cominciando a porre nei secondi membri le p uguali a zero, traendo così una prima approssimazione, poi (introducendo la prima nei secondi membri), una seconda, ecc.; sia anche col metodo dei coefficienti indeterminati, assumendo le p sotto forma di serie (multiple) nelle x.

[1] *Sul teorema di esistenza delle funzioni implicite*, Atti del R. Istituto Veneto, 1909-1910.

Idromeccanica. — *Moti di fluidi incompressibili il cui vortice è normale alla velocità.* Nota di BRUNO FINZI, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI.

In una recente Memoria [1] il dott. B. Segre si è posta la questione cinematica di caratterizzare i moti che, avendo luogo per superfici parallele, soddisfino alle relazioni

$$\text{div}\,\mathbf{v} = 0\,, \tag{1}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0\,, \tag{2}$$

dove $\mathbf{v}$ definisce manifestamente la velocità. Tali superfici non possono essere che piani o sfere concentriche: è quest'ultimo caso che particolarmente forma oggetto della Memoria citata.

Mi propongo di mostrare nella Nota presente, sotto quali condizioni restrittive le conclusioni del Segre siano compatibili con le equazioni indefinite dell'idrodinamica. Risulta in particolare, che se la massa fluida è soggetta a forze conservative, le superfici di flusso non possono essere che piani. Dimostro la tesi dapprima assai semplicemente per fluidi perfetti (§ 3), e poi, con calcolo un po' più laborioso, per fluidi viscosi (§ 4).

1. Sia $\mathbf{k}_3$ un vettore unitario normale alla sfera di centro O e raggio x_3, e diretto verso l'esterno: la soluzione cinematica, di cui si è detto, così si esprime:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}_3 \wedge \text{grad}\,\psi \quad ; \quad \text{rot}\,\mathbf{v} = \varrho\,\mathbf{k}_3\,; \tag{3}$$

$$\psi = \psi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma'} \log \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\varrho(x_1', x_2', x_3', t)\,d\sigma'. \tag{4}$$ [2]

t rappresenta il tempo, x_1 e x_2 due coordinate ortogonali di un punto P della sfera di raggio x_3 (uguali alle coordinate cartesiane della proiezione

[1] *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile*, Annali di matematica, serie IV, tomo I, fasc. 1°, pp. 31–55. Cfr. anche su tali moti: Beltrami, *Considerazioni idrodinamiche*, Rend. Ist. Lombardo, serie II, vol. XXII, fasc. 2°; Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*. I, Pavia 1912, p. 122.

[2] B. Segre, loc. cit., formula (41), dove le coordinate x_1, x_2, x_3 sono indicate con p, q, r, e non è messa in evidenza la dipendenza di $\mathbf{v}, \psi, \varrho$ da t.

stereografica dal punto di coordinate cartesiane $(0,0,1)$ sul piano diametrale xy di Q, proiezione da O di P sulla sfera di raggio unitario), θ l'arco di cerchio massimo congiungente due punti $P(x_1, x_2, x_3)$, $P'(x_1', x_2', x_3')$, σ' tutta l'area vorticosa della sfera,

$$\varrho = |\operatorname{rot} \mathbf{v}| = \frac{1}{x_3^2}\,\bar{\varrho}\,(x_1, x_2, t), \tag{5}$$

così che $\varrho\, d\sigma'$ non dipende da x_3, come vuol la (4) (1).

2. La (3) dovrà soddisfare alla equazione vettoriale dei fluidi incompressibili, cioè alla

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \tfrac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 + \nu \operatorname{rot}^2 \mathbf{v} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p \quad (2). \tag{6}$$

Nella (6) la densità è assunta uguale a uno, e p rappresenta la pressione specifica, $\mathbf{F}$ la forza unitaria di massa, ν il coefficiente di viscosità. Prendendo il rot. di entrambi i membri, sarà sempre e ovunque:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \{(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}\} + \nu \operatorname{rot}^3 \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{F}.$$

Questa, per la (3) e la (4), diviene:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} \mathbf{k}_3 + \operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \varrho + \nu \operatorname{rot}^2 \varrho\, \mathbf{k}_3 = \operatorname{rot} \mathbf{F} \quad (3). \tag{7}$$

La (7) stabilisce il vincolo a cui deve soggiacere $\mathbf{F}$ perchè sia possibile il moto di un fluido soddisfacente alle (1) e (2).

3. Sia, in particolare, il fluido soggetto a forze conservative, per le quali $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. La (7) diverrà:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} \mathbf{k}_3 + \operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \varrho + \nu \operatorname{rot}^2 \varrho\, \mathbf{k}_3 = 0. \tag{8}$$

(1) Si noti come la soluzione cinematica del Segre rientri in una categoria di moti messi recentemente in rilievo dal prof. U. Cisotti (*Sull'energia cinetica di masse fluide continue: espressioni varie dell'energia cinetica*, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXXIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2°, pp. 59, 60), per i quali esiste un punto fisso O (il centro delle sfere concentriche lungo le quali avviene il moto) tale che $(P - O) \times (\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0$.

(2) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, loc. cit., II, pp 56 e 62, ove si tenga presente che $\Delta' \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot}^2 \mathbf{v}$ (loc. cit., I, pag. 98).

(3) Si osservi che, essendo $\mathbf{k}_3 \times \operatorname{grad} \psi = 0$,

$$\operatorname{rot} \{\varrho\, \mathbf{k}_3 \wedge (\mathbf{k}_3 \wedge \operatorname{grad} \psi)\} = -\operatorname{rot} \varrho \operatorname{grad} \psi = -\{\operatorname{grad} \varrho \wedge \operatorname{grad} \psi + \varrho \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi\}.$$

Proiettiamo la (8) lungo le linee coordinate x_1, x_2, x_3 della metrica definita da

$$(9) \qquad ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s = \left(\frac{2x_3}{f}\right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{2x_3}{f}\right)^2 dx_2^2 + dx_3^2 \ (^1),$$

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 1 ;$$

e si consideri il caso particolare di fluidi perfetti, per i quali $\nu = 0$.

Se $\mathbf{k}_i$ è un vettore unitario tangente alla linea x_i:

$$\operatorname{grad}\varrho = \sum_{1}^{3}{}_{i} \sqrt{a_{ii}}\,\frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\,\mathbf{k}_i \quad , \quad \operatorname{grad}\psi = \sum_{1}^{3}{}_{i} \sqrt{a_{ii}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,\mathbf{k}_i \quad (i = 1, 2, 3) \ (^2).$$

Moltiplichiamo la (8) scalarmente per $\mathbf{k}_i$: risulterà

$$\begin{cases} \dfrac{f}{2x_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} = \dfrac{f}{2x_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} = 0 \\ \left(\dfrac{f}{2x_3}\right)^2 \dfrac{d(\psi,\varrho)}{d(x_1,x_2)} + \dfrac{\partial\varrho}{\partial t} = 0 . \end{cases}$$

Le prime due per x_3 finito sono assurde, esigendo esse che sia o $\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} = 0$, oppure $\psi = \text{cost}$. La prima soluzione, per $\bar{\varrho} \neq 0$, è in contraddizione con la (5), per $\bar{\varrho} = 0$ (moto irrotazionale) le (2), (3), (4) perderebbero ogni significato. La seconda annullerebbe, in virtù della (3) in ogni luogo e in ogni istante la velocità. La (8) non è dunque soddisfatta che per $x_3 = \infty$, nella ipotesi cioè di moto piano.

4. Si consideri il caso di fluidi viscosi: per essi $\nu \neq 0$:

Sia R_i $(i = 1, 2, 3)$ il sistema covariante associato a $\varrho\mathbf{k}_3$, così che $\sqrt{a_{ii}}\,\mathrm{R}_i$ sia la componente di $\varrho\mathbf{k}_3$ secondo x_i. Sarà $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 0$, $\mathrm{R}_3 = \varrho$. Le componenti di $\operatorname{rot}^2\varrho\mathbf{k}_3$ saranno allora

$$\mathrm{M}_i = \sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)}\,\mathrm{R}_{ipq} - \frac{\partial \operatorname{div}\varrho\mathbf{k}_3}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \ (^3).$$

Ricordando che $\varrho\mathbf{k}_3 = \operatorname{rot}\mathbf{v}$,

$$\mathrm{M}_i = \sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)}\,\mathrm{R}_{ipq} .$$

(1) B. Segre, loc. cit., formula (23).

(2) Cfr. Ricci e Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu*, Blanchard, Paris 1923, pp. 135-137, ove si ricordi che il sistema covariante associato a $\operatorname{grad}\varrho$ è $\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_i}$, a $\operatorname{grad}\psi$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$.

(3) Ricci e Levi-Civita, loc. cit., pag. 196, formula (5').

Ma in virtù della (9) è:

$$\begin{cases} R_{111} = \dfrac{8x_3}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_1} \;;\; R_{222} = \dfrac{8x_3}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_2} \;;\; R_{333} = \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_3^2}; \\ R_{122} = R_{211} = R_{133} = R_{233} = 0; \\ R_{311} = \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2} - \left(\dfrac{f}{2x_3}\right)^2\left[\left(\dfrac{4x_3}{f^2}\right)^2\varrho + \dfrac{\partial\dfrac{2x_3^2}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_1}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\dfrac{2x_3^2}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_2}}{\partial x_2}\right] - \dfrac{4x_3}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3}; \\ R_{322} = \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_2^2} - \left(\dfrac{f}{2x_3}\right)^2\left[\left(\dfrac{4x_3}{f^2}\right)^2\varrho + \dfrac{\partial\dfrac{2x_3^2}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_2}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\dfrac{2x_3^2}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_1}}{\partial x_1}\right] - \dfrac{4x_3}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3}; \end{cases}$$

così che

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{2}{x_3}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_1} \;;\; M_2 = \dfrac{2}{x_3}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_2} \\ M_3 = \left(\dfrac{f}{2x_3}\right)^2\left[\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_2^2} + \dfrac{8x_3}{f^2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} - \dfrac{8}{f^2}\varrho\right] + \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_3^2}. \end{cases}$$

La (8), ove si tenga conto della (5), si muterà nelle

$$(8') \qquad \begin{cases} \dfrac{f}{x_3^4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\bar{\varrho} = \dfrac{2\nu}{x_3^3}\dfrac{\partial\bar{\varrho}}{\partial x_1} \;;\; \dfrac{f}{x_3^4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\bar{\varrho} = -\dfrac{2\nu}{x_3^3}\dfrac{\partial\bar{\varrho}}{\partial x_2}; \\ \dfrac{f^2}{4x_3^4}\dfrac{d(\psi,\bar{\varrho})}{d(x_1,x_2)} = -\nu\dfrac{f^2}{4x_3^4}\left(\dfrac{\partial^2\bar{\varrho}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x_2^2} + \dfrac{8}{f^2}\bar{\varrho}\right) - \dfrac{1}{x_3^2}\dfrac{\partial\bar{\varrho}}{\partial t}. \end{cases}$$

Queste, per x_3 finito e non nullo, diverranno:

$$(8'') \qquad \begin{cases} \dfrac{f}{x_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\bar{\varrho} = 2\nu\dfrac{\partial\bar{\varrho}}{\partial x_1} \;;\; \dfrac{f}{x_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\bar{\varrho} = -2\nu\dfrac{\partial\bar{\varrho}}{\partial x_2} \\ \dfrac{d(\psi,\bar{\varrho})}{d(x_1,x_2)} = -\nu\left(\dfrac{\partial^2\bar{\varrho}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\bar{\varrho}}{\partial x_2^2} + \dfrac{8}{f^2}\bar{\varrho}\right) - \dfrac{4x_3^2}{f^2}\dfrac{\partial\bar{\varrho}}{\partial t}. \end{cases}$$

Le prime due delle (8''), poi che f, ψ, $\bar{\varrho}$ sono funzioni di x_1 e x_2 soltanto, sono assurde, a meno che sia $\bar{\varrho} = 0$ (moto irrotazionale), con che le (2), (3), (4) perderebbero ogni significato; oppure contemporaneamente $\bar{\varrho} = \text{cost.}$ e $\psi = \text{cost.}$: anche quest'ultima soluzione è assurda, esigendo essa, per la (3), l'annullarsi di **v**. Le (8'), e quindi la (8), non son dunque soddisfatte che per $x_3 = \infty$, nella sola ipotesi cioè di moto piano.

Fisica. — *Sul fenomeno di Tyndall* (1). Nota del dott. Antonio Carrelli, presentata dal Socio M. Cantone.

È ben noto che illuminando un mezzo torbido mediante un fascio di luce si nota lateralmente una diffusione dovuta a fenomeni di diffrazione. Quest'effetto fu scoperto da Tyndall e Lord Rayleigh poco dopo si occupò diffusamente della questione, e ne dette una teoria, enunciando tra l'altro la ben nota legge: che cioè l'intensità del fascio diffratto ha una distribuzione spettrale inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda. Il problema ha avuto in seguito un grandissimo sviluppo sia dal lato teorico che sperimentale ed è stato trattato da un gran numero di teorici e di sperimentatori, che si sono proposti svariati scopi. In questa Nota io mi limito a mettere in evidenza un particolare importante, che quasi sempre sembra trascurato dai varî fisici che si sono occupati del problema.

Il Tyndall notò che illuminando il mezzo torbido mediante luce naturale ed osservando in direzione normale al fascio, la luce diffusa è tutta polarizzata perpendicolarmente alla direzione del fascio primario, finchè la grandezza e la concentrazione dei granuli non assume valori elevati, poichè in tal caso la luce emessa lateralmente non si estingue completamente mediante un nicol disposto come precedentemente.

Rimane infatti in tal caso una luce residua più ricca di radiazioni di piccola lunghezza d'onda ed il Tyndall indicò tale luce con la denominazione di « residual bleu ». Lord Rayleigh (2) che trattò il problema applicando l'equazioni di Maxwell nella loro forma classica, giunse alla conclusione che illuminando la soluzione con luce polarizzata si doveva osservare lateralmente nella direzione del vettore elettrico eccitatore una luce diffusa proveniente da una luce già diffusa e quindi più ricca di radiazioni di piccola lunghezza di onda, e completamente polarizzata con vettore elettrico parallelo alla direzione di propagazione del fascio primario. Egli però nelle esperienze compiute usò luce naturale, contentandosi di osservare la luce diffusa con un nicol.

Gli autori moderni (3) procedono da diverse considerazioni e si propongono specialmente di ricavare i parametri delle particelle dell'andamento del

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Napoli.

(2) Lord Rayleigh, Phil. Mag, XII, pag. 81.

(3) Per la bibliografia completa rimando al lavoro di M. A. Schirmann, Jahr. der Radioak. und Elektr., 80, 1, n. 69, 1921.

fenomeno di diffusione ed usano nelle considerazioni teoriche sviluppi analitici alquanto complicati.

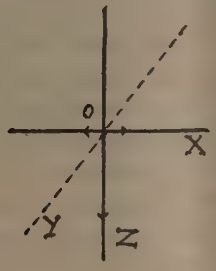
Ho voluto considerare invece la quistione da un punto di vista generale, *macroscopico*, e precisamente analizzare il fenomeno Tyndall in soluzioni colloidali con l'illuminazione di luce *polarizzata* ed osservando la soluzione nei varî azimut. Ho usato come mezzo diffondente una soluzione di solfo colloidale ottenuta aggiungendo poche goccie di acido solforico ad una soluzione di iposolfito di sodio, soluzione già adoperata da Tyndall e da Lord Rayleigh. Con questa soluzione si ha il vantaggio di avere granuli di grandezza variabile con il tempo, e con l'aggiunta di ammoniaca si può arrestare a piacere il processo di precipitazione del solfo. Il fascio luminoso di una lampada ad arco passava attraverso un nicol mobile su cerchio graduato orizzontale e cadeva sulla superficie libera della soluzione. La posizione del piano di polarizzazione poteva mutare a piacere in modo che guardando in direzione normale al fascio si poteva osservare l'emissione per diffusione perpendicolarmente o parallelamente al vettore elettrico del fascio incidente. La soluzione era contenuta in un recipiente cilindrico in modo d'avere incidenza normale sulle pareti di vetro per la luce diffusa, e ciò per tutti gli azimut; si era così sicuri che il passaggio attraverso le pareti non attirava lo stato di polarizzazione di tale luce. Il recipiente era di notevole lunghezza e così la luce incidente giungeva al fondo tanto indebolita da evitare il disturbo dipendente dal fascio riflesso.

Ecco quanto può stabilirsi dall'analisi condotta con il suddetto metodo: nei primi stadî del processo di precipitazione, granuli poco numerosi e piccoli, la luce diffusa in direzione normale al vettore elettrico è debole, e di colore bluastro, nella direzione parallela al vettore elettrico non si nota emissione apprezzabile. Man mano che aumentano le dimensioni ed il numero dei granuli nella prima direzione si osserva emissione gradatamente più intensa, anche più ricca di radiazioni di piccola lunghezza d'onda e tale luce, com'è ben noto, è completamente polarizzata.

Ma l'osservazione lungo la direzione parallela a tale vettore ha mostrato che anche in quest'azimut si riscontra una notevole emissione, quantunque meno intensa dell'altra, e formata di radiazioni con una diversa distribuzione spettrale, essendo nettamente più ricca di radiazioni violette. Ho potuto assicurarmi che essa è sempre *completamente polarizzata e con vettore elettrico parallelo alla direzione di propagazione del fascio eccitatore*. Può dirsi quindi che nei due azimut principali si presenta un'emissione di luce in misura differente con una polarizzazione completa, essendo però i due vettori elettrici ruotati di 90°. Aumentando ancora la concentrazione in guisa che la soluzione diventa d'aspetto lattiginoso la polarizzazione nei due azimut non è completa. Ho potuto riscontrare lo stesso andamento con piccole variazioni riguardo le intensità, specie per le soluzioni colorate,

per numerose altre sostanze disciolte in acqua come gomma-gutta, gomma-lacca, gomma-damar, colofonio, gelatina, solfuro di nickel, e può dirsi che l'emissione polarizzata in direzione parallela al vettore elettrico è un fenomeno d'importanza molto maggiore delle traccie di depolarizzazione, che nello studio del fenomeno condotto con luce polarizzata dipendono dall'anisotropia dei granuli dispersi.

Per un interpretazione teorica del fenomeno osservato si deve tener presente che quando la grandezza e la concentrazione dei granuli è notevole la luce diffusa dà origine ad un fenomeno secondario che può, in tal caso, facilmente osservarsi. Ora il fenomeno dello sparpagliamento dipende dalla circostanza che il mezzo attraversato dalle onde non è omogeneo, e quindi dà origine ad un sistema di onde diffratte che si propagano con determinata polarizzazione e secondo determinata legge nelle varie direzioni.



Sia Z la direzione di propagazione dell'energia e X la direzione del vettore elettrico del fascio (v. fig.); lungo Y la luce diffusa è polarizzata con vettore elettrico parallelo a X e solo lungo X non si avrà alcuna emissione per questo primo effetto.

Ma la considerazione di questa emissione (effetto Tyndall primario) non esaurisce completamente l'argomento in esame, poichè se le variazioni dei parametri ottici nei varî punti del sistema sono grandi, l'intensità luminosa di questa luce diffusa è tanto notevole da dare origine ad un'ulteriore diffusione.

Deve aversi quindi un effetto secondario in dipendenza appunto di questa emissione, e cioè un'ulteriore diffusione della luce già diffusa. Quest'effetto si potrà riscontrare solo nella direzione che non presenta emissione per effetto primario, cioè deve presentarsi una diffusione lungo l'asse X. Ciò dipende come già si è detto dal fatto che il mezzo è attraversato da onde diffratte in tutte le direzioni, eccetto nella direzione Z dove si ha solo la propagazione del fascio eccitatore.

Quale sarà la direzione del vettore elettrico nella luce diffusa lungo X? Poichè lungo Y il vettore elettrico è parallelo a quello del fascio eccitatore

e cioè perpendicolare alla direzione di propagazione del fascio e alla direzione X per la quale non si ha emissione, ragionando analogamente può dirsi che il vettore elettrico dell'energia che si propaga lungo X deve essere diretto nelle direzioni normali alle direzioni di propagazione delle onde diffratte che originano questa ulteriore diffusione e ancora nelle direzioni per le quali non si ha emissione per effetto primario. Ma in un piano perpendicolare all'asse X di direzioni che soddisfano contemporaneamente a queste due condizioni ce n'è una sola, precisamente quella parallela all'asse Z, la quale è normale alla direzione Y, dove si riscontra il massimo della emissione primaria ed è l'unica direzione tra quelle del piano considerato lungo la quale non si ha luce diffusa poichè è la direzione di propagazione del fascio primario. Dunque la luce emessa lungo l'asse X è completamente polarizzata lungo l'asse Z conformemente ai risultati sperimentali. Se inoltre si ammette la validità della legge di Lord Rayleigh circa la distribuzione spettrale delle intensità, risulta evidentemente, come il Rayleigh già stabilì, che la luce « bleu residuo » ha una distribuzione delle intensità proporzionale all'inversa dell'ottava potenza della lunghezza d'onda.

È da notare infine che in quest'effetto si riscontra un'applicazione del principio delle simmetrie di Curie, ritrovandosi le simmetrie delle cause negli effetti. Infatti la causa è qui costituita da un fascio luminoso polarizzato che ha come elementi di simmetria un'asse polare, direzione di propagazione della luce, e due piani di simmetria distinti, quello contenente il vettore elettrico e quello contenente il vettore magnetico. Tali elementi si riscontrano nel fenomeno di emissione da me studiato, poichè questa è nettamente distinta in due piani e in essa si riscontra ancora la polarità dell'asse, poichè la qualità della luce diffusa è funzione dello spessore dello strato attraversato dal fascio eccitatore.

Dal punto di vista dell'effetto Tyndall adunque il mezzo eterogeneo attraversato da un fascio di luce polarizzata acquista la simmetria di un cristallo della classe piramidale del sistema rombico.

Fisica. — *Nuove regolarità nello spettro del tetrafluoruro di silicio.* Nota di C. Porlezza, presentata dal Socio R. Nasini (1).

In una Nota precedente (2) ho esposto i risultati delle mie osservazioni relative allo spettro di bande del tetrafluoruro di silicio; già allora feci notare come dalle mie ricerche risultasse, tra l'altro, che tre delle bande possedevano valori delle frequenze che le facevano rientrare nelle formule stabilite da Dufour per le bande X, Y, Z (3). Estendendo ora l'esame a tutti i dati allora ottenuti, mi è risultato che esiste in tale spettro qualche altra regolarità, che forma oggetto della presente Nota.

Riporto qui le lunghezze d'onda, con le intensità, e le frequenze delle bande che ho considerato:

λ	*i*	N	Indicazione delle bande				λ	*i*	N	Indicazione delle bande				
4616.57	0	21661	X				4421.00	6	22619		Y			
4609.61	1	21694			Z		4400.58	10	22724			Z		
4605.25	0	21724		Y			4398.38	10	22736	X				
4575.18	1	21857	X				4388.64	4	22786		Y			
4569.45	2	21884			Z		4387.11	3	22794					
4564.98	1	21906		Y			4368.50	15	22891	X				
4535.91	2	22046	X				4365.58	3	22906				Y′	
4531.62	3	22067			Z		4353.92	3	22968					
4526.45	2	22092		Y			4338.71	3	23049				X′	
4498.64	4	22229	X				4334.39	4	23071					Z′
4495.82	5	22243			Z		4329.73	2	23096				Y′	
4492.71	1	22258					4304.21	3	23233				X′	
4489.75	4	22272		Y			4301.31	3	23249					Z′
4485.56	1	22294					4298.79	3	23263					
4482.71	1	22308					4295.84	2	23279				Y′	
4463.41	4	22404	X				4283.35	1	23346					
4462.06	6	22411			Z		4271.59	3	23410				X′	
4456.24	3	22441					4270.45	3	23416					Z′
4454.55	5	22449		Y			4265.06	2	23446					
4450.20	1	22471					4263.47	2	23455				Y′	
4445.23	1	22496					4254.65	1	23503					
4430.35 (4)	9	22572			Z		4240.92	4	23580				X′	
4429.98	9	22574	X				4233.02	1	23624				Y′	

(1) Pres. nella seduta del 4 novembre 1923.

(2) Questi Rendiconti, *20* [5], 2°, pag. 486.

(3) Comptes Rendus, *146*, I, 810 (1908); Phys. Zeitsch., *10*, 235; Le Radium, ottobre 1908. È da notare che il Kayser nel suo trattato dice che le formule di Dufour « sagen nichts » perchè non sono indicati i valori da attribuire ad *m*; in realtà Dufour ha indicato questi valori, ma soltanto nella Nota apparsa sui Comptes Rendus.

(4) Questa banda è stata osservata soltanto da Dufour, avendo questi lavorato nel 4° ordine del reticolo.

Le bande contrassegnate con X, Y. Z, per le quali già, come ho detto, Dufour aveva trovato la formula di composizione, possono anche rappresentarsi secondo le formule indicate in testa a ciascuno dei tre specchietti seguenti, dove sono riportati i valori osservati e calcolati:

Banda X: $N = 22891 - 155\,m - 3{,}5\,m^2$
$(m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

N osservate	Differenze	N calcolate	Differenze
21661		21659	
	196		197
21857		21856	
	189		190
22046		22046	
	183		183
22229		22229	
	175		176
22404		22405	
	170		169
22574		22574	
	162		162
22736		22736	
	155		155
22891		22891	

Banda Y: $N = 22786 - 163.3\,m - 2{,}56\,m^2$
$(m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

N osservate	Differenze	N calcolate	Differenze
21714		21715	
	192		191
21906		21906	
	186		186
22092		22092	
	181		181
22273		22273	
	176		176
22449		22449	
	170		171
22619		22620	
	167		166
22786		22786	

Banda Z: $N = 22724 - 148.9\,m - 3{,}8\,m^2$
$(m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

N osservate	Differenze	N calcolate	Differenze
21694		21694	
	190		191
21884		21885	
	183		183
22067		22068	
	176		175
22243		22243	
	168		168
22411		22411	
	161		160
22572		22571	
	152		153
22724		22724	

Riunendo alcune delle bande rimanenti, si possono trovare altre formole analoghe, e precisamente quelle riunite nei seguenti tre specchietti:

Banda X': $N = 23580 - 166.5\ m - 3{,}5\ m^2$
$(m = 0, 1, 2, 3)$

N osservate	Differenze	N calcolate	Differenze
23049		23049	
	184		181
23233	177	23233	177
23410	170	23410	170
23580		23580	

Banda Y': $N = 23624 - 165.5\ m - 3{,}5\ m^2$
$(m = 0, 1, 2, 3, 4)$

N osservate	Differenze	N calcolate	Differenze
22966		22966	
	130		130
23096	183	23096	183
23279	176	23279	176
23455	169	23455	169
23624		23624	

Banda Z': $N = 23416 - 161.5\ m - 5.5\ m^2$
$(m = 0, 1, 2)$

N osservate	Differenze	N calcolate	Differenze
23071		23071	
	178		178
23249	167	23249	167
23416		23416	

Oltre a queste bande rappresentabili mediante formule ve ne sono altre che mostrano differenze dello stesso ordine di quelle delle bande elencate ma che risultano di due sole componenti: le riunisco nel quadro seguente:

$$\begin{matrix} 22258 \\ 22441 \end{matrix} > 183 \qquad \begin{matrix} 22294 \\ 22471 \end{matrix} > 177 \qquad \begin{matrix} 22308 \\ 22496 \end{matrix} > 188$$

$$\begin{matrix} 22794 \\ 22968 \end{matrix} > 174 \qquad \begin{matrix} 23263 \\ 23446 \end{matrix} > 183 \qquad \begin{matrix} 23346 \\ 23503 \end{matrix} > 167$$

Anche ricorrendo alla rappresentazione grafica, la distribuzione in serie fra loro connesse delle bande ora dette e quelle sopra elencate non è molto netta; piuttosto risulta un nesso ben chiaro, tra alcune delle bande di cui ho dimostrata la regolarità, dal punto di vista del fenomeno di Zeeman.

Nel lavoro più volte citato, Dufour ha studiato l'azione del campo magnetico sullo spettro del fluoruro di silicio; è stato anzi in base a questo che egli ha fatto la classificazione delle bande X, Y, Z, trovando:

per la banda X: fenomeno Zeeman normale
valore approssimativo dello sdoppiamento + 0,20 U. Å.

per la banda Y: fenomeno Zeeman anormale
valore medio dello sdoppiamento . . . . — 0,10 U. Å.

per la banda Z: fenomeno Zeeman anormale
valore medio dello sdoppiamento . . . . — 0,15 U. Å.

Dufour, oltre alle componenti di queste bande, ne ha studiato anche altre, tra quelle meno intense, pur non riunendole in serie. Per quanto Dufour abbia misurato o trovato nel suo spettro meno bande di quanto non ne risultino dal mio studio citato in principio di questa Nota, pure è possibile fare qualche raffronto. Se confrontiamo i valori degli sdoppiamenti per le bande X′ e Z′ troviamo:

	λ	N	Natura del fenomeno	Valore dello sdoppiamento
Banda X′	4338.71	23049	normale	+ 0.17 U. Å.
	4304.21	23233	»	+ 0.15 U. Å.
	4271.59	23410	»	+ 0.15 U. Å.
	4240.92	23580	»	+ 0.17 U. Å.
				media + 0.16 U. Å.
Banda Z′	4334.39	23071	anormale	— 0.11 U. Å.
	4301.31	23249	»	— 0.13 U. Å.
	4270.45	23416	»	— 0.10 U. Å.
				media — 0.11 U. Å.

Appare quindi che anche dal punto di vista dello studio del fenomeno di Zeeman longitudinale, fatto da Dufour, le componenti indicate si trovano giustamente messe in serie.

Per la banda Y′ il confronto dà risultati meno buoni perchè non tutte le componenti figurano nella tabella di Dufour, e le tre che vi figurano darebbero effetti diversi:

λ	N	Fenomeno	Valore dello sdoppiamento
4365.58	22906	normale	??
4329.73	23096	nullo	0
4295 84	23279	anormale	??

Per queste componenti almeno non resta quindi che il fatto della possibilità di riunirle con altre in un'unica formula; le altre a due componenti da me sopra elencate non figurano nella tabella di Dufour.

Concludendo, in questa Nota:

1) Accanto alle regolarità gia riscontrate, se ne sono trovate altre, tra cui principalmente tre nuovi aggruppamenti, per i quali viene data la formula, a diversi componenti e inoltre sei a due soli componenti.

2) Per due dei principali aggruppamenti viene anche mostrata la coordinazione facendo l'opportuno raffronto con i risultati ottenuti da Dufour nello studio del fenomeno di Zeeman longitudinale.

Chimica-fisica. — *Di un metodo termico per lo studio dei sistemi gassosi* (1). Nota di GIORGIO PICCARDI, presentata dal Corrispondente G. PELLIZZARI.

Per lo studio dei sistemi gassosi si è usato un metodo termico informato a questo principio fondamentale:

fornire al sistema in esame delle quantità misurate di calore secondo una funzione conosciuta del tempo scelta ad arbitrio $Q = f(t)$:

osservare le corrispondenti variazioni di temperatura del sistema stesso, ossia costruire sperimentalmente la funzione $\theta = \varphi(t)$;

da queste due costruire una terza funzione $\theta = \Phi(Q)$ espressione dei fenomeni termici avvenuti.

Il sistema è contenuto in una superficie chiusa, rigida, invariabile, di capacità termica trascurabile e di conducibilità termica costante; il calore gli è fornito attraverso una piccolissima superficie tutta interna a quella che lo racchiude; il mezzo che necessariamente lo circonda, è di natura tale da

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica del R. Istituto di Studî Superiori in Firenze.

non rendere piccolissime o nulle le variazioni di temperatura che vi avvengono. Per la temperatura del sistema si prende la media delle temperature di un numero grandissimo di punti; occorre peraltro che le superficie siano conformate in modo da non ostacolare menomamente le correnti di convezione o qualunque eventuale movimento dei gas.

I. — *Sistemi costituiti da un gas perfetto.*

Si supponga che il sistema sia costituito da un gas perfetto; che il mezzo che lo circonda sia a temperatura costante T; che il calore sia fornito secondo questa semplice legge:

$$\frac{dQ}{dt} = K = \text{costante} \tag{1}$$

in cui dQ è la quantità di calore fornita nel tempo dt.

Sia dq la quantità di calore ceduta dal sistema al mezzo che lo circonda nello stesso tempo dt;

θ la temperatura del sistema e $d\theta$ la sua variazione nel solito tempo dt;

M una costante data dal prodotto massa calore specifico;

H un fattore costante dipendente dalla superficie e dalla capacità di trasporto del calore per moti convettivi del gas in esame.

Supponendo $\theta - T$ costante nel tempo dt si può scrivere:

$$\frac{dq}{dt} = H(\theta - T) \tag{2}$$

$$dQ - dq = M \cdot d\theta\,, \tag{3}$$

Da 1, 2, 3, si ricava l'equazione differenziale del fenomeno

$$\frac{d\theta}{K - H(\theta - T)} = \frac{dt}{M} \tag{4}$$

integrando fra θ e T, e 0 e t rispettivamente

$$-\frac{1}{H} \cdot \log \frac{K + HT - H\theta}{K} = \frac{t}{M}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\theta = T + \frac{K}{H}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{H}{M} \cdot t}}\right) \tag{5}$$

Combinando la 4 e la 5 si ricava

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{M} \cdot \frac{1}{e^{\frac{H}{M} \cdot t}} \quad (6)$$

Con queste equazioni si può studiare teoricamente tutto il sistema di curve temperatura tempo.

A regime stazionario $\frac{d\theta}{dt} = 0$ e ciò avviene per un valore di t molto grande. Infatti la (6) dà

$$\lim_{t=\infty} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

allora la (5) dà

$$\lim_{t=\infty} \theta = T + \frac{K}{H} \quad (7)$$

il che significa che tutte le curve temperatura–tempo possiedono un asintoto orizzontale, la cui ordinata è calcolabile in precedenza, conoscendo T, K, H. Se H non è noto, basta con una sola esperienza trovare il valore limite di θ per $t = \infty$, per un dato K e per un dato T, e sostituirlo nella (7); allora

$$H = \frac{K}{\theta - T}.$$

Dalla (5) si ricava che, per t e T costanti, θ varia linearmente con K. Se interessa soltanto l'incremento di temperatura $\theta - T$ la (5) dà:

$$\theta - T = K \cdot \frac{1}{H}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{H}{M} \cdot t}}\right)$$

ossia l'incremento di temperatura è proporzionale a K.

Se ne deduce, che due qualsiansi di queste curve, hanno le ordinate corrispondenti che stanno fra loro in un rapporto costante e che è sufficiente conoscere una qualunque di esse, per costruire tutte le altre.

Il diagramma $\theta - T$, K (per t e T cost.) sarà dunque una retta uscente dall'origine delle coordinate, di coefficiente angolare

$$\frac{1}{H}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{H}{M} \cdot t}}\right).$$

La retta dei valori limiti di $\theta - T$ per $t = \infty$ poichè $\lim_{t=\infty} \frac{1}{e^{\frac{H}{M} \cdot t}} = 0$ ha per

coefficiente angolare $\frac{1}{H}$. Quindi la conoscenza di H è sufficiente per costruire tale retta.

Quanto precede mostra come pel caso di un gas perfetto, ossia pel caso in cui si sia potuto ritenere costanti M e H (entro certi limiti di temperatura), il calcolo dia modo di conoscere perfettamente i diagrammi $\theta - T$, t e $\theta - T$, K per un certo gas. Non si può peraltro sapere in quali rapporti stiano, nelle stesse condizioni, questi diagrammi per diversi gas perfetti, poichè non sappiamo da quali fattori dipenda la costante H o più precisamente la capacità di trasporto del calore per moti convettivi. La costante H risulta solo dai valori determinati sperimentalmente.

Chimica. — *Azione della cloropicrina sul fenolo* (1). Nota di S. Berlingozzi e P. Badolato, presentata dal Socio A. Piutti (2).

Il comportamento chimico della cloropicrina

è stato frequentemente oggetto di studio. Il suo potere ossidante, nitrante e clorurante è stato rilevato da diversi sperimentatori (3); e la natura labile di uno dei suoi atomi di cloro fu segnalata da Killen Macbeth e Doig Pratt (4), i quali per azione dell'idrazina e dell'idrato potassico sulla cloropicrina riuscirono ad eliminare da essa un atomo di cloro.

Recentemente Rây e Das (5) in una serie d'interessanti ricerche hanno ampiamente illustrata la reazione fra cloropicrina e mercaptani che conduce a composti del tipo $(R \cdot S)_3 \equiv C - NO_2$ e che può impiegarsi opportunamente come mezzo per distinguere i mercaptani dai cosidetti mercaptani potenziali, i quali in condizioni analoghe si comportano diversamente con separazione di solfo con svolgimento di acido solfidrico.

Della cloropicrina fu pure studiato il comportamento nella reazione di Friedel-Krafts. A questo proposito il Boedetker (6) facendo reagire benzene

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica organica e farmaceutica della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 2 marzo 1924.

(3) Stenhouse, Ann., *66*, 241 (1848); Geisse, Ann., *109*, 282 (1859); Cossa, Gazz. chim. ital., *2*, 181 (1872); Piutti, Gazz. chim. ital., *51*, I, 145 (1921); Piutti, Atti 1° Congr. nazion. di chimica, Roma, pag. 437 (1923).

(4) Journ. chem. Soc., *119*, II, 1358 (1921).

(5) Journ. chem. Soc., *121*, 823 (1922).

(6) Bull. Soc. chim., [4], III, 726 (1908).

e cloropicrina in presenza di cloruro d'alluminio ottenne la formazione del trifenil-metano e del trifenil-carbinolo proveniente dalla ossidazione del primo. Nelle suddette condizioni, dunque, avviene facilmente la eliminazione del gruppo NO_2 che verosimilmente viene speso ad ossidare parte del trifenil-metano.

A noi parve di qualche interesse studiare anche il comportamento della cloropicrina nella reazione di Reimer-Tiemann per la sintesi delle ossialdeidi cicliche; ed a questo scopo abbiamo fatto reagire fenolo e cloropicrina in presenza di idrato potassico. Nelle condizioni che saranno descritte particolareggiatamente più avanti si ebbe pure la eliminazione del gruppo NO_2 che spiegò azione ossidante riducendosi ad ammoniaca. I prodotti principali della reazione furono le aldeidi orto- e para-ossibenzoiche e gli acidi corrispondenti. Contemporaneamente si formarono notevoli quantità di acido pararosolico proveniente verosimilmente dalla condensazione del fenolo con l'aldeide salicilica.

Anche nella reazione di Reimer-Tiemann la cloropicrina si comporta dunque in modo simile a quello del cloroformio, con la sola differenza che accanto alle ossialdeidi si formano per ossidazione i corrispondenti acidi.

Parte sperimentale.

Gr. 20 di fenolo sono aggiunti ad una soluzione di 50 gr. di soda caustica in 100 di acqua. Si scalda il miscuglio a 50°-60° e ad esso si aggiungono a poco per volta, agitando, 30 gr. di cloropicrina. Il liquido assume così una colorazione gialla che va sempre accentuandosi. Terminata l'aggiunta di cloropicrina si scalda la miscela su bagno di sabbia all'ebullizione a ricadere fino a che non si nota più la presenza di cloropicrina; ciò che si ottiene, di solito, dopo 4-5 ore di riscaldamento. L'ebollizione, dapprima tumultuosa, si va man mano regolarizzando; il liquido schiumeggia ed appare intensamente colorato in rosso sangue; verso la fine della reazione si nota un sensibile e prolungato sviluppo di ammoniaca. A questo punto si acidifica fortemente con acido cloridrico ottenendosi la separazione di un olio bruno denso; dopo di che si distilla in corrente di vapore fino a che il distillato non dà più la reazione dei fenoli con cloruro ferrico.

Trattamento del distillato. — Il distillato è costituito da un liquido acquoso colorato in giallo, contenente una certa quantità di olio giallo-scuro che si raccoglie ben presto al fondo del recipiente (1). Con etere si scioglie l'olio e si estrae ripetutamente il liquido. Le soluzioni eteree dibattute prima con bisolfito sodico, poi con carbonato sodico diluito, e finalmente evaporate

(1) Alla superficie del liquido acquoso si raccoglie una sostanza cristallizzata in leggeri aghetti bianchi fusibili a 74°-75°, in quantità insufficiente per effettuarne lo studio

lasciano un residuo di fenolo. Il liquido bisolfitico, acidificato con acido solforico ed estratto con etere cede una sostanza oleosa la quale per distillazione frazionata fornisce, come prodotto principale, un liquido quasi incolore bollente a 195°–197° che mostra tutti i caratteri dell'aldeide salicilica.

Dalla soluzione di carbonato sodico acidificata con acido solforico cristallizzano degli aghetti bianchi fusibili a 157°, che si identificano per acido salicilico.

Trattamento della parte non volatile in corrente di vapore. — Il residuo è costituito da un liquido giallo-bruno e da una massa semisolida raccolta al fondo del recipiente. Si filtra a caldo per separare quest'ultima; il filtrato si fa bollire con carbone animale, si filtra di nuovo e dopo raffreddamento si estrae con etere. Per evaporazione dell'etere si ottiene un residuo oleoso che col lungo riposo si trasforma in una massa cristallina. Questa sottoposta a cristallizzazione frazionata dall'acqua fornisce due prodotti. Il più solubile si presenta in aghetti prismatici bianchi fusibili a 210° e mostra tutti i caratteri dell'acido p-ossibenzoico. Il meno solubile cristallizza pure in rosettte formate da aghi bianchi fusibili a 115°–116° che si identificano per aldeide p-ossibenzoica.

La massa rimasta sul filtro si solidifica per raffreddamento ed è colorata in rosso–bruno con riflessi verdastri. Essa contiene ancora quantità non trascurabili di aldeide ed acido p-ossibenzoici, che si possono estrarre macinando a lungo con carbonato sodico diluito ed evaporando la soluzione dopo averla acidificata. Il residuo solido viene lavato con acqua, per asportarne completamente il carbonato sodico, e quindi cristallizzato ripetutamente da un miscuglio di alcool ed acido acetico; si ottiene così una massa cristallina rosso-scura, solubile negli alcali con colorazione rosso-fucsina intensa. La sostanza mostra tutti i caratteri dell'acido pararosolico; l'accompagna una resina bruna da cui difficilmente si riesce a liberarla.

Chimica. — *La durezza delle leghe di piombo e cadmio e di piombo e stagno.* Nota di CLARA DI CAPUA e MARIA ARNONE, presentata dal Corrispondente N. PARRAVANO.

LEGHE DI PIOMBO E CADMIO.

Precedenti ricerche (1) eseguite da una di noi su queste leghe binarie hanno portato al risultato che i due metalli sono completamente non miscibili allo stato solido già in corrispondenza della temperatura eutettica (245°). Questa conclusione dedotta dall'analisi termica precisa è stata giustificata dal diagramma delle conducibilità specifiche riportate pure nel lavoro citato.

Era da aspettarsi pertanto che il diagramma delle durezze dovesse avere l'aspetto di una retta congiungente le durezze dei due metalli puri. I risultati delle esperienze non hanno però confermato la previsione.

Nella tabella che segue sono riportate le durezze di queste leghe binarie come vengono ottenute di getto e dopo 200 ore di ricottura a 200°.

Tabella 1.

N°. d'ordine delle leghe	Composizione in %.		Durezza in numeri Brinell	
	Cd	Pb		dopo 200 ore di ricottura
1	100	—	18.15	18.15
2	90	10	17.73	17.73
3	80	20	17.22	17.22
4	70	30	16.90	16.90
5	60	40	16.41	16.41
6	50	50	15.98	15.98
7	40	60	15.42	15.42
8	30	70	15.—	15.—
9	20	80	14.48	14.48
10	10	90	13.42	13.42
11	8	92	13.10	13.23
12	6	94	12.65	13.—
13	4	96	12.19	12.81
14	3	97	11.91	12.60
15	2	98	11.43	12 35
16	1	99	10.60	12.10
17	—	100	3.58	3.58

(1) Rend. Acc. Lincei (5). 31, 1° sem. 162 (1922).

I diagrammi che questi valori permettono di descrivere (fig. 1) si discostano infatti dallo schema che si sarebbe immaginato.

La curva n.° 1 dopo un decorso quasi rettilineo a partire dal valore di durezza del Cd, si inflette bruscamente in corrispondenza del 2–3 % di Cd per discendere al valore molto basso della durezza del Pb.

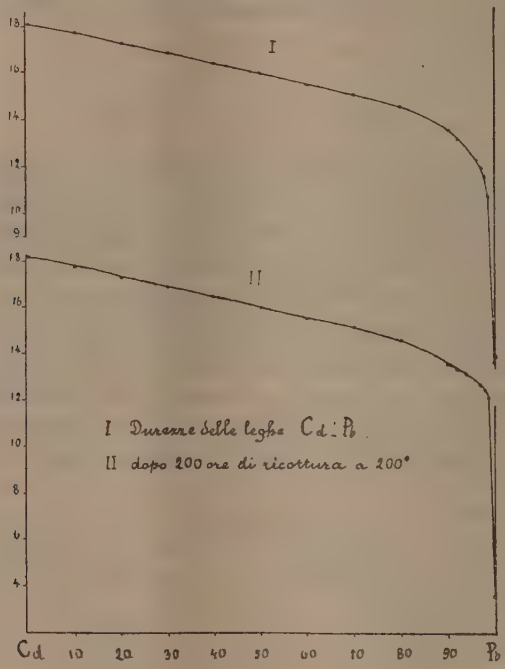


Fig. 1.

La lunga ricottura effettuata a 200° non cambia gran che l'aspetto della curva (II fig. 1) anzi il cambiamento di direzione diventa anche più brusco in corrispondenza di circa l'1 % di Cd.

Questi risultati portano ad ammettere l'esistenza di una solubilità solida del cadmio nel piombo aggirantesi intorno al 2 % di Cd.

Occorre quindi ritornare sopra alle conclusioni alle quali aveava portato l'analisi termica esatta di questa serie di leghe. La miscibilità allo stato solido era stata esclusa in base alla estrapolazione dei tempi di arresto riferiti alla massa e alla velocità 1. Le lunghezze di questi tratti misurati in centimetri sono riportate nella fig. 2 la quale riproduce la costruzione dell'area eutettica dalla parte del Pb. E' evidente che la linea che unisce i tratti d'arresto si annulla praticamente in corrisdondenza del Pb puro.

Le conducibilità portano allo stesso risultato, come si vede dal diagramma della fig. 3.

Abbiamo allora pensato che la non concordanza di risultati fosse dovuta al fatto che, sia nel caso dei tempi di arresto che delle conducibilità, i valori

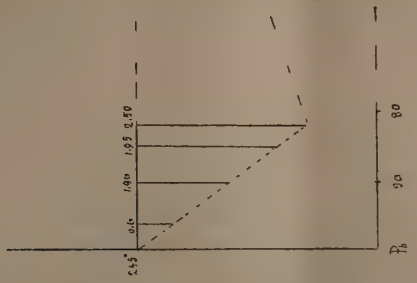
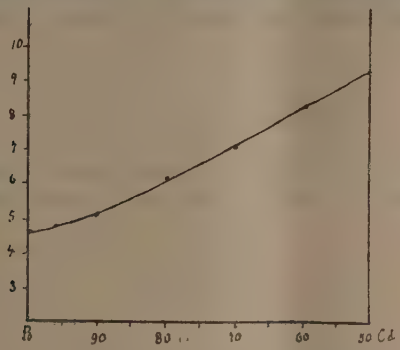


Fig. 2.

sperimentali nelle vicinanze del Pb fossero in numero troppo piccolo per poterne trarre deduzioni sicure; e che pertanto le conclusioni di allora non



Conducibilità specifiche da Pb a 50% Pb 50% Cd

Fig. 3.

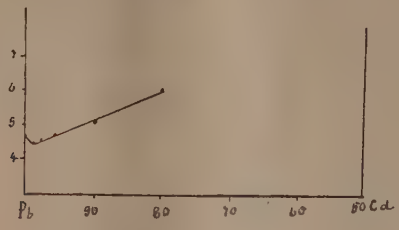
concordino con le presenti per difetto di estrapolazione nell'un caso e di interpolazione nell'altro.

Abbiamo creduto opportuno perciò ripetere alcune misure di conducibilità con leghe molto ricche di piombo, e cioè con 99 , 98 , 96 ecc. % di piombo. I valori ottenuti sono riportati qui sotto.

Tabella 2.

Composizione delle leghe Pb %	Cd %	Conducibilità specifica a 10° 4,605 × 10^4
100	—	4.605 »
99	1	4.428 »
98	2	4.515 »
96	4	4.673 »
94	6	4.795 »
90	10	5.141 »
80	20	6.194 »

Questi numeri permettono di costruire il diagramma di conducibilità riprodotto nella fig. 4, in esso è evidente la diminuzione di conduttività prodotta dall'aggiunta dell'1 % di cadmio, per modo che resta così eliminata



Conducibilità specifiche da Pb a 80% Pb 20% Cd

Fig. 4.

la contradizione tra diagramma di durezza e di conducibiltà, e rimane confermata la solubilità solida del cadmio nel piombo a temperatura ordinaria nella proporzione di circa l'1 %.

Leghe di piombo e stagno.

Le durezze di queste leghe sono state misurate nella maniera precedentemente indicata ed i valori ottenuti sono riportati nella tabelle seguente.

Tabella 3.

N°. d'ordine delle leghe	Composizione in % Sn	Pb	Durezza in numeri Brinell	Dopo 385 ore di ricottura
1	100	—	5.95	5.95
2	99	1	11.82	16.78
3	98	2	12.—	18.40
4	94	6	13.38	18.20
5	90	10	13.79	17.94
6	80	20	15.35	17.20
7	70	30	15.85	16.70
8	63	37	16.70	16.25
9	50	50	15.60	15.40
10	40	60	15.—	14.74
11	30	70	14.42	14.42
12	20	80	13.66	13.95
13	16	84	13.66	13.75
14	14	86	13.50	13.66
15	12	88	13.30	13.50
16	10	90	12.62	13.41
17	8	92	11.45	11.63
18	6	94	9.40	9.58
19	4	96	8.42	7.71
20	2	98	6.70	6.14
21	—	100	3.58	3.58

Essi permettono di ostruire i due diagrammi della fig. 5. La curva I si riferisce alle leghe non ricotte e presenta il solito massimo in corrispondenza dell'eutettico. La II corrisponde alla leghe che hanno raggiunto il loro equilibrio cristallino e strutturale e mette nettamente in evidenza una solubilita solida del piombo nello stagno di circa l'1-2 % e dello stagno nel piombo, a temperatura ordinaria, di circa il 10 % .

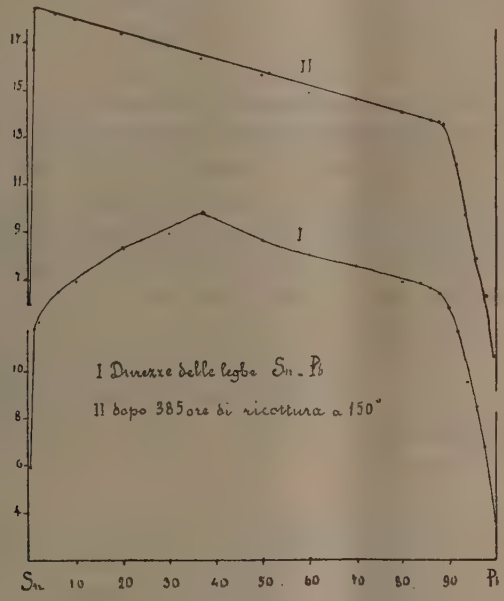


Fig. 5.

Le concentrazioni dei cristalli misti saturi di questa serie di leghe sono state stabilite da diversi autori con metodi differenti ed i risultati sono stati in genere diversi col variare dei medoti adoperati (1). Circa la solubilità del piombo nello stagno i nostri risultati concordano bene con quelli del Degens, e concordanza sussiste pure, quanto a ordine di grandezza, con i risultati di tutti gli altri autori per quel che riguarda la solubilità dello stagno nel piombo. Gli aumenti di durezza che subiscono da una parte lo stagno per la presenza di piombo in soluzione solida e dall'altra il piombo per la presenza di stagno disciolto sono però così rilevanti che non esitiamo a ritenere la concentrazione del 10 % di Sn da noi dedotta come la più vicina alla reale per il cristallo misto saturo saturo di stagno a temperatura ordinaria.

(1) Guertler, *Metalloghraphie*, Erster Band, Erster Teil 726 (1922); Parravano e Scortecci, Gazzetta Chimica Italiana, *50*, I, 83 (1920).

Paleontologia. — *Fossili eocenici dell'Istria.* Nota della dott. Giulia Degli Innocenti, presentata dal Socio Carlo De Stefani.

Gli autori che si sono occupati della geologia e della paleontologia dell'Eocene istriano si trovano generalmente concordi nel riferirlo all'Eocene e nel ritenere predominante in Istria il Luteziano; però la presenza entro le faune studiate di elementi appartenenti all'Eocene superiore ha fatto supporre ad alcuni l'esistenza anche di questo livello nella regione in discorso. Ad analoghi risultati ritengo pure io di essere giunta studiando una serie di fossili che mi furono forniti per studio dal prof. C. De Stefani e che provengono tutti da Gherdosella presso Pisino in Istria: una piccola parte è indicata più specificatamente da Bottonega, località posta nelle vicinanze di Gherdosella.

I fossili da me esaminati comprendono Foraminifere, Echinidi, Crinoidi, e denti di Selaci: in tutto 39 specie ben determinabili, delle quali presento l'elenco indicando con un asterisco quelle che vengono ora riscontrate in Istria per la prima volta:

Foraminifera. — *Operculina canalifera*, d'Archiac.
Nummulites millecaput, Boubée.
Nummulites obtusus, de C. Sowerby.
**Nummulites perforatus*, de Montfort.
Assilina mamillata, d'Archiac.
Assilina exponens, de C. Sowerby.
Assilina spira, de Roissy.
Assilina subspira, de la Harpe.
Ortophragmina patellaris, Schlt, var. *pseudamericana*, Sacco.
Orbitolites complanata, Lamarck, var. *gigantea*, Sacco.

Echinoidea. — **Cidaris* (*Stereocidaris*), sp. n.
Cidaris subularis, d'Archiac.
**Cidaris acicularis*, d'Archiac.
Cidaris Oosteri, Laube.
**Arachniopleurus*, sp. n.
**Brissopatagus Danesi*, Oppenheim.
**Parabrissus pseodoprenaster*, Bittner.
Macropneustes brissoides, Desor.
**Schizaster vicinalis*, Agassiz.
Schizaster Archiaci, Cotteau.
Ditremaster Covazii, Cotteau.
Pericosmus spatangoides, De Loriol.
Ciclaster stacheanus, Bittner.
**Oriolampas? Michelini*, Munier Chalmas.
Pygorynchus Taramellii, Bittner.

Echinoidea. — *Echinanthus scutella*, Lamarck.
Echinolampas Luciani, Taramelli.
Conoclypeus conoidens, Agassiz.
**Conoclypeus* cfr. *pyrenaicus*, Cotteau.

Crinoidea. — *Balanocrinus Diaboli*, Bayan.
**Balanocrinus subbasaltiformis*, Miller.
**Balanocrinus? Guiscardii*, Meneghini.
**Balanocrinus? Canavarii*. Rovereto.

Pisces. — *Carcharodon auriculatus*, Blainville.
**Carcharodon lanceolatus*, Agassiz.
Oxyrina Desori, Agassiz.
Odontaspis Hopei, Agassiz.
Odontaspis elegans, Agassiz.
**Notidanus serratissimus*. Agassiz.

Ritengo però opportuno notare che *Carch. lanceolatus*, Ag. viene da qualche autore messo in sinonimia con *Ch. auriculatus* Blainv. già riscontrato in Istria.

Inoltre le due specie *Conoclypeus pyrenaicus*, Cott. e *Cidaris acicularis*, d'Arch. ritengo che vengano adesso per la prima volta osservate in Italia, come pure il *gen. Arachniopleurus*.

Le altre specie presentano un riscontro molto evidente con quelle di La Ganèpe (Biarritz), di S. Giovanni Ilarione e con la fauna fossile istriana descritta da Toniolo [1] e dalla Regè [2] e da essi attribuita al Luteziano medio.

A questo stesso livello devo perciò ascrivere la maggioranza delle specie sunnominate, per quanto la presenza di alcune foraminifere, quali *Assil. exponens* Sow., *A. mamillata*, d'Arch. *A. subspira* de la Harpe, caratteristiche del Luteziano Inferiore, e quella di altre specie che a Biarritz appaiono nel Luteziano Superiore (*Cid. subularis*, d'Arch. e *Macropn. brissoides*, Desor.) mostrino pure la presenza di ambedue questi livelli del Luteziano.

Fra i fossili che ho avuto in esame appariscono due forme proprie di terreni più recenti: esse sono *Cidaris acicularis* d'Arch., citata nel Bartoniano e *Schiz. vicinalis*, Agass. nel Tongriano. Ciò concorda del resto con le osservazioni di altri autori esposte più sopra e conferma l'esistenza a Gherdosella di un livello più recente.

[1] A. R. Toniolo, *L'eocene dei dintorni di Rozzo in Istria e la sua fauna*. Palaeont. Ital., 1909.

[2] R. Regè, *Nummuliti ed orbitoidi di alcune località istriane*. Atti Soc. ital. sc. nat. in Milano, t. LV, 1916.

Biologia. — *Caratteri differenziali dei giovani stadi di Orcynus thynnus Ltkn., O. alalonga Risso, Auxis bisus Bp.* Nota di M. Sella, presentata dal Socio B. Grassi.

In questi ultimi anni, a cominciare dal 1912, ho collezionato un gran numero di larve e giovani Scomberoidi delle specie qui sopra indicate. Questo materiale proviene in parte dalla Crociera della R. N. « Ciclope » nei mari della Sicilia (1913), cui presi parte per incarico del R. Comitato Talassografico, in parte, e la maggiore, dallo Stretto di Messina, e ne vado debitore al prof. L. Sanzo, direttore di quell' Istituto di biologia marina, il quale fece eseguire per mio conto numerose pesche plantoniche ordinarie, e pesche con sorgente luminosa (lampadara): i giovani delle tre specie, infatti, presentano tutti fototropismo positivo, e si possono catturare in abbondanza di notte con la luce. Dell'*Auxis* io avevo ottenuto, in precedenza, anche lo sviluppo larvale dall'uovo fecondato artificialmente.

Appunto perchè queste tre specie forniscono il materiale di Scomberoidi di gran lunga il più abbondante nelle acque di Messina, durante il periodo estivo, ho pensato di trattarne qui separatamente.

Mi limiterò a indicare i principali caratteri degli stadî postlarvali, e larve alla fine della fase di assorbimento del sacco vitellino.

In questi giovani stadî, le tre specie si assomigliano grandemente fra di loro, per forma e proporzioni. Le misure seguenti, in individui di grandezze quasi uguali, servono a dare un'idea delle dimensioni principali.

	Lunghezza totale	Lung. tot. esclusa la pinna caudale.	Distanza longitudinale, misurata sull'asse, fra:				Altezza traversale in corrispondenza di:			
			Muso – margine anter. occhio.	Muso – margine post. occhio.	Muso – inizio 1ª dorsale	Muso – inizio pinna anale.	Margine anteriore occhio.	Margine posteriore occhio.	Inizio 1ª dorsale	Inizio pinna anale.
Auxis bisus . .	8.10	7.20	0.96	1.80	2.58	4 92	1.30	2.04	1.98	1.26
Orcynus thynnus	7.08	6.30	0.96	1.86	2.70	4.20	1.32	1.98	1.74	1.20
» alalonga	7.50	6.78	1.20	2.34	3.42	4.32	1.44	1.86	1.62	1.20
Auxis bisus. . .	16.50	14.64	2.16	4.14	6.00	9.90	2.70	3.72	4.14	3.36
Orcynus thynnus	16.50	14.70	1.92	3.66	5.40	9.90	2.52	3.30	3.60	3.36
» alalonga	15.84	13.62	1.80	3.42	5.82	9.12	2.52	3.12	3.12	2.46

La forma del corpo, e specialmente la sagoma del capo, sono caratteristiche. Il profilo superiore, dal capo fino alla estremità appuntita del muso, scende quasi diritto o formando un leggero angolo, (tale profilo è invece più curvilineo nel genere *Scomber*); il bordo ventrale presenta un'inclinazione non molto diversa, in senso opposto, dal che nasce una certa simmetria nel profilo dorsale e ventrale del capo. La distanza tra la punta del muso e l'occhio è maggiore di quanto non sia nella maggioranza delle altre forme. La fessura boccale si spinge fin sotto all'occhio, ed è poco inclinata e rettilinea (alquanto ricurva invece nello *Scomber*). La forma delle ossa (opercolo, preopercolo spinoso, ecc.) è simile nelle tre specie. Negli stadî più giovani si contano da 38 a 40 miomeri.

Alcune differenze nelle proporzioni appaiono più tardi. Così nei giovani *Auxis* da 20 m/m in su, l'altezza del corpo si riduce maggiormente che non nel genere *Orcynus*; l'animale diventa più sottile, e questo carattere è facilmente rilevabile ad occhio.

Anche gli abbozzi delle pinne definitive non presentano, al loro apparire, differenze sensibili nell'una o nell'altra forma.

La determinazione delle singole specie può essere basata, a seconda del grado di sviluppo, sui caratteri seguenti:

A. — Dall'assorbimento del sacco vitellino, ad uno stadio che caratterizzeremo brevemente così: corda diritta, non ancora ripiegata all'estremità (urostilo); abbozzi degli ipurali; abbozzi di alcuni raggi al lobo ventrale della p. caudale; rimanente della pinna primordiale ancora indifferenziata. Approssimativamente da m/m 3 a m/m 5–6.

Auxis bisus Bp. — *Pigmento*: numerose unità di pigmento nero (serie impari) lungo il bordo ventrale della muscolatura.

Alla fine del periodo larvale, i punti si estendono *dalla coda* (alla cui estremità possono formare una breve striscia continua), *fino all'ano*. Manca di regola il pigmento lungo il bordo dorsale della muscolatura, in tutta la lunghezza, e sulle pareti di essa (nella larva appena schiusa il pigmento nero è distribuito anche lungo il dorso e, in minor quantità, anche sulla superficie laterale, ma presto subisce una riduzione, ed una localizzazione ventrale, secondo un processo comune a molte larve di Teleostei).

Negli stadî più avanzati, la serie di punti lungo il bordo ventrale si riduce e cessa ad una certa distanza dall'ano; il loro numero, abbastanza variabile, s'aggira *intorno a 7–10*. Spesso un punto di pigmento trovasi sugli abbozzi degli ipurali. Lungo la linea dorsale, un punto può incontrarsi a non grande distanza dalla pinna caudale.

Denti: i denti, che appaiono dopo la fine dello stadio larvale propriamente detto, forniscono un buon carattere differenziale fra genere *Auxis* e genere *Orcynus*.

L'*Auxis* (come l'*Orcynus*) presenta denti in parte diritti, in parte ricurvi; ora, se si considerano i denti ricurvi della *mascella superiore* (la

mandibola non si presta a tale distinzione), si osserva che, nell'*Auxis*, la curvatura è *più uniforme e meno brusca* che nell'*Orcynus*, e interessa non la sola porzione distale del dente, ma un *tratto più esteso della sua lunghezza*. I denti di *Auxis* sono inoltre un poco più sottili e più lunghi; il quale carattere non sempre, tuttavia, è ben definito.

È sufficiente la presenza di un dente con la brusca curvatura tipica dell'*Orcynus*, per giustificare l'esclusione del gen. *Auxis*. Occorre però avere osservato un certo numero di esemplari delle differenti specie, per interpretare esattamente questo carattere.

Orcynus thynnus Ltku. — *Pigmento*: lungo il bordo ventrale della muscolatura, fra ano ed estremità caudale, *3-5 unità di pigmento*; il numero di questi punti può, in qualche caso, essere minore di tre oppure maggiore di cinque. Essi formano una successione meno regolare che nell'*Auxis*, con unità spesso disuguali fra di loro in grandezza, e più grandi, tondeggianti e compatte che nell'*Auxis*. I punti sono inoltre più spaziati, e raramente fra l'uno e l'altro sono compresi meno di 3 miomeri.

Negli stadî più giovani i punti di pigmento sono un poco più numerosi: in seguito, alcuni si approfondano tra le due metà della muscolatura e scompaiono.

Lungo il bordo dorsale della muscolatura si nota pure, di regola, qualche punto di pigmento, *in genere un paio*, qualche volta meno o di più, più raramente nessuno.

Quasi costantemente, uno di questi punti dorsali, situato nella mezzeria del corpo o verso i due terzi posteriori, *spicca per la sua grossezza*; anzi, in individui verso la fine del periodo larvale, può incontrarsi una vera e propria *macchia*, estendentesi in parte anche sulla pinna primordiale.

Lungo la linea di separazione fra muscolatura dorsale e ventrale si osserva, in qualche individuo, un punto di pigmento (o anche due o tre), verso la mezzeria del corpo; più spesso manca.

Denti: come si è accennato sopra, alcuni denti della mascella sup. sono ricurvi e in alcuni di questi, sebbene non in tutti, la curvatura interessa solo *la porzione distale* del dente, e si inizia *con angolo alquanto più brusco* che nell'*Auxis*.

Orcynus alalonga Risso. — *Pigmento*: *assenza di pigmento lungo il bordo dorsale e ventrale, e sulla muscolatura.* Soltanto *sulla pinna caudale* sono di solito presenti *da 1 a 3 punti*, in posizione dorsale o ventrale.

Denti: come nell'*O. thynnus*.

B. — Stadio con gli abbozzi dei portaraggi delle pinne ben visibili; successiva comparsa dei primi raggi ossei della I^{a} D.; estremità della corda in processo d'incurvamento, o incurvata. Lunghezza approssimativa: 5-6-7 m/m.

Auxis bisus Bp. — *Pigmento*: lungo il bordo ventrale, è limitato al tratto fra l'abbozzo craniale della p. anale, e l'estremità caudale: il numero delle

macchioline di pigmento *si riduce a 5-7, in qualche caso anche a meno*, e la disposizione è più irregolare di prima. Lungo il bordo dorsale, nel tratto corrispondente alle future pinnule, possono fare la loro apparizione, negli individui più avanzati, i primi punti del pigmento destinato a formare la serie dorsale; negli stadî più giovani manca, o si riduce a un punto solo.

Può accadere che, in questa fase, il semplice criterio basato sulla pigmentazione lasci dubbioso l'osservatore intorno all'appartenenza all'*Auxis* o all'*O. thynnus*. Nel primo, tuttavia, le macchioline si presentano più distese e ramificate che nel tonno.

La determinazione, in ogni caso, può essere basata o confermata dalla *forma dei denti*.

Orcynus thynnus Ltkn. — *Pigmento*: la pigmentazione, lungo il bordo dorsale e ventrale, si mantiene all'incirca quella descritta sopra, con tendenza a ridursi. Di solito non si osserva più nessun punto lungo la linea laterale mediana. Sull'abbozzo dei raggi della I^a D. appaiono le prime due o tre intense macchie di pigmento.

Orcynus alalonga Risso. — *Pigmento*: come negli stadî precedenti. Sull'abbozzo dei raggi della I^a D. prime macchie di pigmento.

C. — Stadî con I^a D. ben differenziata. Narice unica in via di sdoppiarsi o sdoppiata. Approssimativamente da m/m 7 a m/m 10-12.

Auxis bisus Bp. — *Pigmento*: al pigmento lungo il bordo ventrale (regione delle pinnule e della p. anale), si aggiungono gradualmente altre due serie di cromatofori, l'una *lungo il bordo dorsale*, nella regione occupata dalle pinnule e dalla II^a D.; l'altra *lungo la linea laterale mediana*, a partire da una certa distanza dal tronco della coda (serie pari, le due prime con punti a destra e a sinistra del piano delle pinne). Sulla I^a D. punti di pigmento *scarsi* e di colorazione *meno intensa* che nel gen. *Orcynus*. Assenza di pigmento sulle altre pinne.

Denti: come sopra.

Orcynus thynnus Ltkn. — *Pigmento*: lungo il bordo ventrale *da 1 a 3 macchie*, in genere compatte, tondeggianti. Lungo il bordo dorsale *1-2 macchie*. Un punto sulla coda, non sempre. *I^a Dorsale con numerose grandi macchie di pigmento nero*. Quest'ultimo carattere, comune al gen. *Orcynus*, è evidentissimo, e permette, anche macroscopicamente, una distinzione immediata con l'*Auxis*. Manca il pigmento sulle altre pinne.

Denti: come stadî precedenti.

Orcynus alalonga Risso. — *Pigmento*: limitato a *1-2 punti sulla caudale*, situati in posizione ventrale o dorsale.

Pigmento sulla I^a D. come nel tonno.

Denti: come stadî precedenti.

D. — Da m/m 12-15 a m/m 100.

Presentano solo più interesse i caratteri distintivi fra *O. thynnus* e *O alalonga*; quanto all'*Auxis*, converrà ancora notare che, in un primo tempo,

appaiono fra la I^a e la II^a D. (separate nell'adulto), alcuni raggi (circa 6), nella porzione membranosa, bassa, di pinna primordiale che ancora unisce le due pinne. Non sempre, tuttavia, il fatto è molto evidente. Questi raggi, in seguito, si approfondano nel solco dorsale mediano e cessano di essere visibili. Per brevissimo tempo, adunque, le due pinne si possono considerare continue, con la formula: I^a D. 17, II^a D. e pinnule 20 = tot. 37; lo stesso numero complessivo di raggi, si noti, che nel genere *Orcynus*. Nell'adulto la formula è: I^a D. 10, più raram. 9–11; II^a D. e pinnule 12 + VIII, più raram. 11 + VIII.

Passando al gen. *Orcynus*, il numero dei raggi delle due pinne dorsali (continue fra loro) e dell'anale, sono insufficienti a discriminare le due specie, perchè eguali: I^a D. + II^a D. e pinn. = 37, raram. 36–38; anale e pinn. = 22, raram. 21–23. Lo stesso dicasi per le caratteristiche della pettorale, che solo molto tardi acquista in lunghezza nell'*alalonga*.

Fra i caratteri differenziali noto i seguenti.

Pigmento: il carattere distintivo del pigmento può ancora servire fino ad una lunghezza di circa 20 m/m. Nell'*alalonga* si osserva generalmente un punto sulla pinna caudale, al bordo degli ipurali. Ma raramente (forse una volta su sei o sette), esiste un punto sul bordo ventrale della muscolatura, e mai nel tratto ventrale corrispondente al tronco della coda; nel *thynnus* invece, non mancano mai, o eccezionalmente, uno o più punti di pigmento lungo il bordo ventrale destro o sinistro, e, abbastanza spesso, un punto è situato nel tratto corrispondente al tronco della coda.

Organi ciatiformi: davanti all'occhio esiste una serie di organi di senso, disposti secondo un arco, che ha origine sotto la narice posteriore e scende cranialmente verso il mascellare; per trasparenza si vedono i singoli ramuscoli nervosi che li innervano, e che si spiccano da un ramo unico. Nel *thynnus*, gli organi ciatiformi di solito *sono 6, ed oscillano fra 5 e 7*. Nell'*alalonga sono 7, ed oscillano fra 6 e 8*. Cosicchè nei casi estremi permettono una distinzione.

Linea laterale: dalla lunghezza di m/m 25 circa in su, è visibile un certo tratto della linea laterale, a cominciare dal capo. Prendendo origine là dove termina dorsalmente la fessura dell'opercolo, la linea laterale forma, a livello della base della pettorale, *un'angolo quasi retto, nel thynnus; una rientranza curvilinea e in ogni caso un angolo più ottuso, nell'alalonga*. Questo carattere differenziale è molto sicuro.

Periodi dell'anno in cui gli stadi più giovani vengono pescati nello stretto di Messina.

L'*Auxis* ha un periodo di riproduzione assai esteso: piccoli fino a 1–1,5 cm., s'incontrano dalla 2^a metà di giugno al 20 di settembre e specialmente dal luglio ai primi di settembre.

Tonno: piccoli fino a 1–1,5 cm., si incontrano dal 20 giugno ai primi di agosto.

Alalonga: dai primi di agosto alla fine di settembre, più abbondante dopo il 15 di agosto.

Si può quindi con certezza attribuire gli esemplari del genere *Orcynus*, di questa lunghezza e di lunghezze maggiori, pescati sino alla fine di luglio (almeno fino al 25 luglio), alla specie *thynnus*, e quelli di 1–2 cm., pescati dopo il 20 agosto, alla specie *alalonga*.

Data la rapidità con cui crescono questi pesci, anche gli esemplari del gen. *Orcynus* di 2–4 cm. che si pescano alla fine di agosto, e quelli fino a 10 cm. che si pescano in settembre, appartengono sempre all'*alalonga*. La discriminazione, mediante caratteri morfologici, per gli esemplari più piccoli, è necessaria soltanto durante il periodo 25 luglio–15 agosto.

Geologia. — *Rocce fossilifere eoceniche, o di aspetto eocenico, del Ladak (campioni raccolti dalla Spedizione Italiana nell'Asia centrale 1913-1914).* Nota di ENRICO FOSSA-MANCINI, presentata dal Socio GIOTTO DAINELLI.

Espongo i primi risultati dello studio, iniziato nel 1920 e in seguito più volte interrotto e ripreso, di parecchi fossili isolati e di molti campioni di rocce fossilifere di aspetto terziario riportati dal Ladak dai professori G. Dainelli e O. Marinelli; ringrazio i chiarissimi raccoglitori del còmpito onorifico che mi hanno voluto affidare e della pazienza e fiducia mostrate nell'attenderne l'adempimento.

Il materiale che ho esaminato consisteva per la massima parte in pezzi di rocce riccamente fossilifere; il grandissimo numero di individui che sono riuscito ad isolare o a riconoscere in sezione sottile appartiene ad un numero relativamente piccolo di specie che si possono ripartire in pochi generi. Lo stato di conservazione è poco buono.

Il materiale trovato in posto proviene da parecchie località addensate intorno a tre centri: Jurutse, Rumbok e Sciusciul. I primi due, che sono vicini, si trovano tra il basso Zanskar e l'Indo in una zona che aveva già fornito qualche foraminifera eocenica (1). Sciusciul è mezzogiorno del lago Pangkong, in regione ritenuta paleozoica.

Da depositi fluviali recenti provengono alcuni interessanti ciottoli pieni di foraminifere eoceniche.

(1) F. Stoliczka, *Summary of geological observations during a visit to the provinces... of Western Tibet*. Mem. Geol. Surv. India, vol. V, parte III, pag. 344, 353, Calcutta, 1866; R. Lydekker, *The geology of the Kashmir and Chamba territories...* ivi, vol. XXII, pag. 107, Calcutta, 1883.

Delle rocce esaminate alcune sono costituite da foraminifere e non presentano resti determinabili di organismi più elevati; nelle altre abbondano conchiglie di molluschi e mancano le foraminifere.

Rocce con foraminifere.

1°) *Marne e calcari marnosi nummulitici di tre località (III, IV e V) dei dintorni di Rumbok.*

Predominano tre coppie: *Nummulites guettardi* D'Arch. — *globulus* Leym., *N. subatacicus* H. Douv. — *atacicus* Leym., *N. lucasi* D'Arch. *A.* — *B.* Sono pure frequentissime certe piccole forme megalosferiche granulose (come *N. vredenburgi* Prev. *A*) oppure con bottone centrale (come *N. mamillinus* H. Douv.) di non facile determinazione. Ho qualche dubbio sulla presenza della *N. beaumonti* D'Arch. Numerosi sono gli individui di *Assilina exponens* (Sow.) e di *A. granulosa* (D'Arch.), ma molto più piccoli di quelli dei nostri paesi; non manca la *A. leymeriei* (D'Arch.). Nella località *III* si hanno addensamenti di *Orthophragmina dispansa* (Sow.) e nella località *V* sono state raccolte *Alveolina oblonga* D'Orb,, *A. ellipsoidalis* Schw. e *Flosculina pasticillata* Schw.

È noto che nel bacino di Parigi e nella regione alpina le *N. guettardi*, *globulus*, *atacicus*, *lucasi* sono ritenute tipicamente luteziane. Però H. Douvillé qualche anno fa (1) ha sostenuto che le nummuliti europee di tipo più primitivo sono *N. guettardi*. *N. globulus* e *N. lucasi*, ed ha mostrato che tanto queste quanto *N. subatacicus*, *N. atacicus*, *A. leymeriei*, *A. granulosa* abbondano nell'Eocene inferiore dell'Aquitania e dei Pirenei. Lo stesso autore ultimamente (2), ha fatto conoscere tutta una fauna di piccole nummuliti granulose o con bottone centrale e di razze nane di *Assilina leymeriei*. — *granulosa* che nella regione Bearnese accompagnano molluschi ritenuti di età cuisiana. Siccome la fauna di foraminifere di Rumbok presenta gli stessi caratteri, la si può supporre contemporanea (3).

Per la facies, e solo per essa, i tre affioramenti di Rumbok differiscono un poco: in quello con *Orthophragminae* (*III*) abbiamo un deposito formatosi piuttosto al largo, in quello con *Alveolinae* (*V*) un deposito sublitoraneo; l'altro è di tipo intermedio.

(1) H. Douvillé, *L'Eocène inférieur en Aquitaine et dans les Pyrenées*. Mém.... Carte Géol. de France, Paris, 1919.

(2) H. Douvillé, *Les premières Nummulites dans l'Eocène du Béarn*. C. R. Acad. Sciences, tomo 178, pag. 36-41, Paris, 1924.

(3) Le marne e i calcari con nummuliti di Rumbok corrispondono inoltre: al *Laki* del Sind occidentale (E. W. Vredenburg, *Introductory note to the stratigraphy of the Ranikot Series*. Palaeont. Ind., N. S., n. 1 pag. VI, Calcutta, 1909); al *Subathu Group* dell'Himalaya occidentale (R. Lydekker, Op. cit., pag. 94); alla *Muskat Series* dell'Oman (G. E. Pilgrim, *The geology of the Persian Gulf*... Mem. Geol. Surv. India, vol. XXXIV, parte IV, pag. 19. Calcutta, 1908).

2°) *Ciottoli di calcare fetido nummulitico del basso terrazzo alla confluenza dello Zanskar coll'Indo.*

Vi ho trovato varie nummuliti (*N. globulus*, *N. atacicus*, *N. lucasi*), una quantità di *Miliolidae* (*Biloculina*, *Quinqueloculina*, *Pentellina*) e resti di echinoidi (specialmente minuti radioli); non ho veduto nè *Alveolinae* nè *Orthophragminae*. Probabilmente la roccia appartiene allo stesso piano delle marne nummulitiche di Rumbok, ma si è formata in ambiente diverso: forse a non grande distanza da un estuario ma non troppo vicino alla costa.

3°) *Ciottolo di calcare fetido con alveoline del letto del fiume Zanskar, a monte di Cilling.*

Qualche piccola nummulite granulosa, molti individui di *Alveolina oblonga*, di *Flosculina decipiens*, qualche *Orbitolites* (s. l.) di tipo semplice, molti *Miliolidae* (*Biloculina*, *Quinqueloculina*, *Pentellina*), rarissime *Orthophragminae*. Le foraminifere maggiori sono frequentemente rotte. La roccia ha la stessa origine e la stessa età di quella degli altri ciottoli; contiene però resti di organismi vissuti in ambienti diversi, e in parte portati e mescolati agli altri per opera delle correnti.

4°) *Calcare con grosse foraminifere di Sciusciul, presso il lago Pangkong.*

Le foraminifere visibili ad occhio nudo si presentano come tanti dischetti nerastri, orientati con una certa uniformità, non isolabili, che spiccano bene sulla massa grigia del calcare; per la forma e le dimensioni loro (diametro medio circa un centimetro, spessore medio poco più di un millimetro) ricordano certe nummuliti, e specialmente la *N. intermedia*. In generale non se ne riconosce la struttura; però cercando pazientemente e con una buona lente si finisce collo scoprire, in qualche individuo leggermente attaccato dagli agenti meteorici, l'esistenza di logge concentriche divise in minute cellette, cosa che permette di escludere che siano *Nummulitidae*; per tale aspetto li ho creduti *Orbitolites* ed eocenici, sino a che non ho esaminato la roccia in sezione sottile. Solo allora mi sono accorto che i dischetti neri sono altrettante *Orbitolinae* microsferiche, grandi e schiacciate, il cui aspetto corrisponde abbastanza bene alle sommarie diagnosi date da D'Archiac per le sue *O. plana* e *O. mamillata*; ed ho scoperto degli individui minori, megalosferici, conici, a base leggermente rientrante, riferibili forse alla *O. conica*. Il calcare di Pangkong non è dunque eocenico ma cretaceo, e probabilmente mesocretaceo; nella Francia settentrionale *O. plana*, *O. mamillata* e *O. conica* si trovano, secondo H. Douvillé, alla base del Cenomaniano.

Il ritrovamento di questo affioramento fossilifero di Sciusciul è importante per varie ragioni: prima di tutto perchè dimostra l'esistenza del Cretaceo dove si asseriva la presenza esclusiva del Paleozoico antico (1); secon-

(1) Veramente F. Stoliczka (*A brief account*... Rec. Geol. Surv. India, vol. VII, pag. 13 e 15, Calcutta, 1874) aveva accennato alla presenza dell'Eocene nei pressi del lago Pangkong, ma in seguito R. Lydekker (*Geology of Ladak*... Rec. Geol. Surv. India, vol. XIII, parte I, pag. 34, 35, Calcutta, 1880) la ha recisamente esclusa.

dariamente perchè può fornire un anello di congiunzione tra i depositi mesocretacei noti da tempo nella catena himalayana e quelli recentemente scoperti nella catena del Karakorum (1); in terzo luogo perchè nell'Asia meridionale e orientale le *Orbitolinae* sono ancora una rarità (2); e finalmente perchè, prestandosi bene il calcare di Sciusciul allo studio dei fossili in sezione sottile, vi si possono osservare certe particolarità morfologiche delle *Orbitolinae* che credo siano ancora imperfettamente conosciute.

Rocce con molluschi.

1°) *Marne scistose con lamellibranchi dei dintorni di Rumbok* (*località II*).

La roccia è un impasto di piccole *Ostreae*, spesso frantumate; il cattivo stato di conservazione lascia poca speranza di arrivare alla determinazione specifica.

2°) *Calcare marnoso scaglioso con gastropodi e lamellibranchi dei dintorni di Rumbok* (*località I*).

Contiene dei *Potamides* ornati di cingoli granulosi che ricordano il *P. baccatus* (Brgn.) e il *P. multigranum* (Desh.), due forme probabilmente nuove di *Bezançonia* e di *Arca* e molelli difficilmente determinabili di altri lamellibranchi.

3°) *Marne scistose con lamellibranchi e rari gastropodi dei dintorni di Jurutse* (*località IV*).

I lamellibranchi sono *Ostreae* uguali o simili a quelle di Rumbok *II*; tra i gastropodi ho distinto diverse forme di *Potamides* forse nuove. In sezione sottile ho veduto resti di Ostracodi (*Cypris?*).

4°) *Marne argillose con gastropodi e piccoli lamellibranchi dei dintorni di Jurutse* (*località I, II e III*).

Prevalgono dei gastropodi eurialini: *Melania* cfr. *alpina* Mayer, ed una folla di *Potamides* che, malgrado la variabilità loro, si possono aggruppare intorno a cinque forme caratteristiche. Queste somigliano rispettivamente al *P. baccatus* (Brgn.), al *P. vulcani* (Brgn.), al *P. semicoronatus* (Lk.), al *P. grecoi* (Vinassa) e ad una varietà del *P. funatus* (Mant.); dell'affinità vera è difficile giudicare, essendo quasi tutti gli individui mancanti della porzione peristomatica e dei giri iniziali. Inoltre ho creduto riconoscere in due esemplari il *Tympanotonus papalis* (Desh.) e il *T. marginatus* (Desh.). Sono frequenti *Bellardia delphinus* Oppn. e una nuova forma di *Bezançonia*.

(1) C. F. Parona, *Faune cretaciche del Caracorum e degli altipiani tibetani*. Rend. R. Acc. Lincei, serie 5ª, vol. XXVI, pag. 53–57, Roma, 1917; G. Stefanini, *Sull'esistenza di depositi cenomaniani e di altri livelli mesozoici nel Caracorum*, ivi, pag. 190-195.

(2) Ne trovarono Hayden in una località del Kashmir, e Griesbach in una località del Khorasan persiano (E. W. Vredenburg, *Occurrence of the genus Orbitolina in India and Persia*. Rec. Geol. Surv. India, vol. XXXV, parte IV, pag. 314; Calcutta, 1908).

Nei campioni di roccia provenienti dalle località *II* e *III* ho trovato rari gastropodi schiettamente marini, come *Ampullina* cfr. *pervicina* Cossm. et Piss., *Bittium plicatulum* (Desh.), *Diastoma* cfr. *costellatum* (Lk.), *Lyria* cfr. *costaria* (Lk.), *Pleurotoma* cfr. *bicatena* Lk.; invece vi ho osservato un enorme numero di valve, generalmente isolate e spesso rotte, di una specie, notevolmente variabile, di *Arca* che (per la presenza di una netta carena posteriore e per l'ornamentazione radiale) somiglia più alla neogenica e vivente *A. tetragona* Poli che ad alcuna delle specie paleogeniche che conosco. Oggi le *Arcae* così ornate sono marine; ve ne sono però certe altre, lisce ma parimenti carenate (subgen. *Scaphula*), che, proprio nell'India, vivono nei fiumi; è quindi difficile stabilire in quale ambiente vivessero quelle di Jurutse. In ogni caso, però, basta la presenza di quei pochi gastropodi marini per dimostrare che, per quanto piene di conchiglie d'estuario, di laguna o di fiume, le marne di Jurutse *II* e *III* si sono deposte in un mare. In sezione sottile l'interno delle conchiglie di *Potamides* si mostra assai spesso riempito da una minuta sabbiolina quarzosa, mentre il quarzo manca del tutto nella marna che le include; dunque non solo i *Potamides* sono vissuti in altre acque, ma le conchiglie loro sono cadute e restate un certo tempo, dopo la morte dell'animale, su altri fondi.

Come è naturale (data la singolarità della facies), tra i molluschi di Rumbok *I* e *II* e di Jurutse difettano le forme caratteristiche dei più vicini depositi terziarî di facies normale; è quindi difficile stabilirne l'età. L'analogia, a prima vista sorprendente, delle malacofaune del Ladak e di Roncà si spiega benissimo coll'identità di facies e non autorizza affatto a ritenerle proprio contemporanee; tanto più che si hanno vaghe notizie del rinvenimento di pochi altri fossili d'acqua dolce o salmastra (specie indeterminate di *Estheria*, *Dreissensia*, *Unio* e forse di *Melania*) nei dintorni di Karghil e di Leh, in orizzonti inferiori al calcare nummulitico [1], che — come ho detto — non può essere più recente del Luteziano.

[1] F. Stoliczka, *A brief account...*, pag. 13; R. Lydekker, *Geology of Ladak...*, pag. 41; *The geology of the Kashmir...*, pag. 100, 105, 118; R. D. Oldham, *A Manual of the Geology of India*, pag. 346, Calcutta, 1893.

Fisiologia. — *Influenza dell'adrenalina sul tono dei muscoli striati* [1]. Nota di TULLIO GAYDA, presentata dal Corrisp. A. HERLITZKA.

I rapporti, che corrono fra il tono dei muscoli striati e la loro innervazione simpatica, non sono ancor oggi completamente chiariti, non ostante le numerose ricerche eseguite in proposito.

Mosso [2] per il primo, basandosi su osservazioni istologiche di A. Perroncito [3], emise l'ipotesi che il tono dei muscoli striati sia in relazione colla loro innervazione simpatica.

Successivamente il Boeke [4], servendosi del metodo delle degenerazioni, dimostrò nei muscoli striati l'esistenza di fibre nervose d'origine simpatica con terminazioni ipolemmali.

Le prime ricerche sperimentali, dirette a stabilire l'importanza dell'innervazione simpatica per il tono dei muscoli striati, si devono al de Boer [5]. Questi osservò, dopo il taglio unilaterale dei rami comunicanti del simpatico nella rana, una diminuzione del tono muscolare dell'arto posteriore del lato operato, la quale non subiva ulteriori variazioni dopo il taglio successivo dello sciatico. La stessa diminuzione del tono muscolare si verificò nel gatto, dopo estirpazione unilaterale del simpatico addominale. Il de Boer, fondandosi sui risultati ottenuti da questi esperimenti e su quelli ottenuti stimolando il muscolo dopo avvelenamento con curaro e veratrina o dopo il taglio dei rami comunicanti o a diverse temperature, oppure esaminando il comportamento della rigidità cadaverica dopo il taglio dei rami comunicanti, giunse alla conclusione che il tono dei muscoli striati dipende dalla loro innervazione simpatica.

Le ricerche su questo argomento vennero riprese da altri autori ed i risultati ottenuti dal de Boer furono ora confermati, ora contraddetti. Così,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino, diretto dal prof. A. Herlitzka.

(2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, XIII, 1° sem., 174, 1904.

(3) Arch. Ital. de Biol., XXXVIII, 393, 1902; Gazz. Med. Ital., LIV, n. 52, 1903.

(4) Intern. Monatschr. f. Anat. u. Physiol., XXVIII, 394, 1911; Anat. Anzeiger, XLIV, 343, 1913; Verhandl. d. k. Akad. v. Vetensch. Amsterdam, II, XVIII, n. 6, 1916; XIX, n. 5, 1917.

(5) Folia Neuro-biologica, VII, 378, 837, 1913; Zeitschr. f. Biol., LXV, 239, 1915.

mentre Kure, Hiramatsu e Naito [1] videro scomparire il tono del diaframma in diversi mammiferi, dopo il taglio dei nervi splancnici, e Maumary [2] osservò nella rana una diminuzione del tono muscolare degli arti posteriori, dopo il taglio del simpatico addominale, Kuno [3] e Salek e Weitbrecht [4] nella rana e Cobb [5] nel gatto non riscontrarono alcuna modificazione o quasi del tono muscolare, dopo la soppressione dell'innervazione simpatica, e altrettanto constatò Deicke [6] nella rana, dopo stimolazione dei rami comunicanti. Dusser de Barenne [7], Negrin y Lopez e v. Brücke [8], v. Rijnberk [9] e Uyeno [10] dimostrarono che la rigidità da scerebrazione nel gatto non dipende dall'innervazione simpatica. Successivamente Dusser de Barenne [11] riscontrò, dopo il taglio delle radici posteriori, una diminuzione del tono muscolare maggiore che dopo il taglio dei rami comunicanti. Ducceschi [12] osservò nel coniglio, dopo l'estirpazione unilaterale del ganglio cervicale superiore del simpatico, una diminuzione del tono dei muscoli del padiglione dell'orecchio del lato operato, rilevabile specialmente applicando dei pesi ai padiglioni delle due orecchie.

Poichè, secondo Pekelharing [13], nel tono muscolare sono utilizzate essenzialmente le sostanze proteiche con formazione di creatina, furono eseguite ricerche collo scopo di stabilire se la formazione di creatina nel muscolo possa dipendere dall'innervazione simpatica; ma, mentre i risultati ottenuti in proposito da Riesser [14] sono in favore di questa tesi, quelli ottenuti da Jansma [15] e da v. Rijnberk [16] ne sono contro.

Anche il ricambio respiratorio dei muscoli venne studiato in rapporto colla loro innervazione simpatica e, mentre Mansfeld e Lukacs [17] ammettono che tale ricambio diminuisca quando venga abolita l'innervazione simpatica, Nakamura [18] trova che il consumo di ossigeno da parte dei muscoli non varia.

(1) Zeitschr. f. exp. Pathol. u. Ther., XVI, 395, 1914.
(2) Zeitschr. f. Biol., LXXIV, 299, 1922.
(3) Journ. of Physiol., XLIX, 139, 1915.
(4) Zeitschr. f. Biol., LXXI, 246, 1920.
(5) Americ. Journ. of Physiol., XLVI, 478, 1918.
(6) Pflüger's Arch., CXCIV, 473, 1922.
(7) Folia Neuro-biologica, VII, 651, 1913.
(8) Pflüger's Arch., CLXVI, 55, 1917.
(9) Arch. neerland. de Physiol., I, 257, 726, 1917.
(10) Journ. of Physiol., LVI, XLIII, 1922.
(11) Pflüger's Arch., CLXVI, 145, 1916.
(12) Arch. di Fisiol., XVII, 59, 1919.
(13) Zeitschr. f. physiol. Chem., LXIV, 262, 1910.
(14) Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmak., LXXX, 183, 1917.
(15) Zeitschr. f. Biol., XLV, 265, 1915.
(16) Loc. cit.
(17) Pflüger's Arch., CLXI, 467, 1915.
(18) Journ. of Physiol., LV, 100, 1921.

In opposizione alle idee di de Boer ed in base ad osservazioni cliniche, Frank (1) e Schäffer (2) credono che il tono muscolare dipenda da una innervazione parasimpatica, mentre quella simpatica agisca antagonisticamente alla prima. Infatti l'iniezione di adrenalina abolirebbe certe forme di contrattura nell'uomo, come quella di Tiegel, e la rigidità determinata nel cane dall'iniezione di fisostigmina.

Ed, a proposito dell'azione dell'adrenalina sul tono muscolare, sono da ricordare ancora le recenti ricerche di Kuré, Shinosaki, Kishimoto, Sato, Hoshino e Tsukiji (3), i quali, contrariamente a quanto osservarono Frank e Schäffer, constatarono che l'iniezione di adrenalina in generale fa scomparire nei gatti e nei cani la diminuzione del tono muscolare e la diminuzione di creatina, conseguenti alla estirpazione del simpatico addominale, mentre l'iniezione di adrenalina (0,5 cm^3 di soluzione all'1 ‰) in animali normali fa aumentare l'eliminazione di creatinina coll'orina. Anche in certe malattie, in cui si ha aumento del tono muscolare ed aumento dell'eliminazione di creatinina, tali fatti scompaiono in seguito ad iniezioni di adrenalina.

Infine non va dimenticato che gia Kuno (4), dopo iniezioni di 0,5-2 cm^3 di soluzione di adrenalina all'1:20.000 nella vena addominale anteriore della rana, non aveva osservato alcuna modificazione del tono del gastrocnemio.

Un disaccordo più completo sull'influenza dell'adrenalina sul tono muscolare non si potrebbe dunque immaginare. Eppure questo argomento è della massima importanza per tentare di risolvere la controversa questione dei rapporti esistenti fra l'innervazione simpatica ed il tono muscolare, poichè è nota l'azione elettivamente eccitante dell'adrenalina sulle terminazioni nervose del simpatico. I risultati ottenuti dalle ricerche finora eseguite in proposito non mi paiono però sufficientemente dimostrativi, specialmente per quanto riguarda gli animali omotermi. Pensai perciò di riprendere l'argomento e nella primavera del 1923 eseguii alcuni esperimenti operando sul cane.

Iniettai l'adrenalina direttamente nell'arteria femorale di un lato e registrai le variazioni del tono muscolare dei gastrocnemi di entrambi i lati mediante due leve miografiche collegate coi tendini di Achille. Se il tono muscolare fosse in rapporto coll'innervazione simpatica dei muscoli, avrei dovuto osservare, come conseguenza dell'iniezione di adrenalina, un aumento del tono del gastrocnemio prima nel lato in cui avevo praticato l'iniezione e poi anche nel lato opposto.

Eseguii gli esperimenti escludendo qualsiasi narcotico. Fissavo il cane sul tavolo d'operazione in posizione supina, isolavo l'arteria femorale di un

(1) Berl. klin. Wochenschr., LVII, 725, 1920.
(2) Pflüger's Arch., CLXXXV, 42, 1920.
(3) Zeitschr. f. d. ges. exp. Med., XXVIII, 244, 1922.
(4) Loc. cit.

lato all'inguine e, mediante due piccole incisioni della cute, mettevo allo scoperto i tendini di Achille dei due lati. Legavo quindi con un filo robusto ognuno di questi tendini, che sezionavo in corrispondenza alla loro inserzione calcaneare, al disotto della legatura. Facevo passare ognuno dei due fili su una apposita puleggia e appendevo un peso all'estremità libera del filo stesso. Collegavo infine questi fili con due lunghe leve miografiche comuni, in modo da poter registrare sul cilindro affumicato ogni minima variazione della lunghezza dei gastrocnemi.

Al momento opportuno, praticavo l'iniezione di adrenalina direttamente nell'arteria femorale verso la periferia, servendomi di un ago da siringa congiunto, mediante un tubo di gomma, con una buretta munita di un rubinetto di vetro. Per potere esercitare una pressione conveniente sul liquido da iniettare, mettevo in rapporto, mediante un altro tubo di gomma, l'estremità superiore della buretta con un sistema costituito da due bolle di vetro comunicanti fra loro per mezzo di un tubo di gomma e contenenti mercurio. Portando le due bolle a diversa altezza l'una rispetto all'altra potevo facilmente ottenere la pressione desiderata.

Operai su diversi cani, ripetendo gli esperimenti parecchie volte sullo stesso animale e modificando anche le condizioni sperimentali. Variai cioè il peso, che tendeva il muscolo, da pochi grammi fino a qualche centinaio di grammi; variai la quantità di adrenalina, che iniettavo, da $^1/_{1000}$ fino a $^1/_{10}$ di mg. e anche più per kg. del peso del corpo; variai infine la rapidità con cui praticavo l'iniezione.

Iniettai sempre soluzioni di cloridrato di adrenalina all'1 ‰ di Parke, Davis & Co. Londra, convenientemente diluite con liquido di Ringer. L'animale durante e dopo l'iniezione si mantenne assolutamente tranquillo, così da permettere una registrazione esatta di ogni eventuale variazione dello stato di tonicità dei gastrocnemi.

Ma devo subito dire che in nessun caso ed in nessuna delle diverse condizioni sperimentali osservai una variazione, anche minima, del tono muscolare dei gastrocnemi. Sempre riscontrai, in seguito alle iniezioni di adrenalina un aumento della pressione sanguigna più o meno accentuata, a seconda della quantità di adrenalina iniettata, aumento rilevabile essenzialmente dal fatto che la pressione iniziale, con cui veniva praticata l'iniezione, se questa non era eseguita molto rapidamente, dopo qualche secondo diventava insufficiente per continuare l'iniezione e doveva perciò essere aumentata.

L'adrenalina esplicava dunque, come è naturale, la sua nota azione vasocostrittrice e giungeva verosimilmente a contatto delle terminazioni nervose d'origine simpatica descritte nei muscoli. E, poichè non era praticamente dimostrabile alcuna modificazione del tono muscolare, mi par lecito concludere che, almeno nelle condizioni da me sperimentate, il tono dei muscoli striati non dipende dalla loro innervazione simpatica.

Fisiologia. — *Il comportamento della catalasi nel sangue per variazioni della temperatura ambiente* (1). Nota del dott. GAETANO VIALE, presentata dal Socio Corrisp. A. HERLITZKA (2).

Lo studio delle variazioni dei fermenti del sangue in funzione del clima (temperatura, altitudine) è un campo di ricerche dal quale può venire qualche luce per l'interpretazione del comportamento del ricambio dell'organismo. Ho perciò iniziato lo studio delle variazioni della quantità di catalasi nel sangue.

La tecnica per il dosaggio del contenuto di catalasi consiste nel determinare quanta acqua ossigenata vien scissa dal fermento nell' unità di tempo [Senter (3), Herlitzka (4)].

Prelevati con una fine pipetta 10 mm^3 di sangue da una ferita eseguita con la lancetta di Franck ai polpastrelli delle dita, si portano in un matracio contenente 10 cm^3 di acqua distillata, si aggiunge una quantità nota di perossido di idrogeno; si mantiene il sistema a 10° per 5 minuti; quindi si aggiungono 20 cmc. di acido solforico (1:4), si diluisce con acqua, e si titola, mediante permanganato $^N/_{10}$, il perossido non scisso.

La piccola quantità di sangue che si adopera non ha influenza apprezzabile sulla decolorazione del permanganato di potassio.

Come avverte anche R. Okey (5) per misure comparative giova meglio il sangue laccato che non sospensioni di sangue in soluzioni isotoniche.

Ho fatto tre serie di determinazioni usando gr. 0.030618, gr. 0,061236, gr. 0,101854 di perossido di idrogeno (pari a 18, 36, 54 cmc. di permanganato di potassio $^N/_{10}$). I numeri riferiti nelle tabelle rappresentano la media di due o tre determinazioni.

Il metodo eseguito sempre con le stesse rigorose modalità dà buoni risultati.

Azione della temperatura. — Il contenuto di catalasi del sangue varia in molte condizioni, ed in genere si osserva che un aumento è concomitante ad una maggiore intensità dei processi ossidativi dell'organismo [Burge (6)].

Per quanto concerne l'azione della temperatura, il Burge, in una breve

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia di Torino diretto dal prof. A. Herlitzka.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 marzo 1924.

(3) Senter G., Zeit, f. Physik, *44*, pag. 247, 1903.

(4) A. Herlitzka, Rend. Acc. dei Lincei, XV, 2° sem., serie 5ª, p. 333, 1906.

(5) R. Okey, Am. Journ., of. Physiol., *62*, pag. 417, 1922.

(6) Burge W. E. et Al. Amer, Journ. of Physiol. vol. dal 41 al 63, 1916-1923.

nota (1) riferisce, senza dar numeri, che l'immersione per 5 minuti in un bagno a 5°, aumenta la catalasi nel sangue.

Recentemente il Burge (2) trovò che il contenuto di catalasi nei parameci e nelle spirogire cresce con l'aumentare della temperatura, parallelamente all'aumentato metabolismo.

Io ho eseguito ricerche sistematiche su alcune persone, durante l'estate, l'autunno, l'inverno, in un ambito di temperature che oscilla fra 3 gradi sotto lo zero e 25°.

Gli esperimenti sono radunati nella seguente

TABELLA.

Quantità di H_2O_2 originaria	gr. 0.030618	gr. 0.061236	gr. 0.101854
	G. V.		
Temperatura —	Quantità di H_2O_2 scissa —	Quantità di H_2O_2 scissa —	Quantità di H_2O_2 scissa —
26°	0.02381	0.02981	0.03232
25°	0.02211	0.02552	0.03572
20°	0.02364	0.03592	0.05613
18°	0.02262	0.03402	0.03572
17°	0.02430	0.02211	0.03062
16°	0.02857	0.04627	0.05103
14°	0.02722	0.05443	0.06634
12°	0.02892	0.05613	0.06804
10°	0.02875	0.05222	0.06464
8°	0.02806	0.05426	0.06123
6°	0.02875	0.05358	0.06378
4°	0.02857	0.05392	0.06634
0°	0.03061	0.05103	0.06273
0°	0.02976	0.05783	0.06634
— 3°	0.03061	0.05953	0.07350
— 3°	0.03061	0.05987	0.07654
	M. L.		
25°	0.02466	0.02211	0.02041
25°	0.02415	9.02721	0.02381
16°	0.02892	0.04082	0.05440
14°	9.02880	0.04423	0.05613
10°	0.02875	0.04932	0.05273
8°	0.02892	0.04763	0.06974
	R. A.		
25°	0.02730	0.02552	0.03816
25°	0.02722	0.03062	0.03912
16°	0.02892	0.04911	0.06038
14°	0.02916	0.05443	0.05936
10°	0.02892	0.05103	0.06380
	A. H.		
25°	0.02670	0.03402	0.04250
10°	0.02976	0.05103	0.05953

Dall'analisi della tabella risulta chiaramente che a basse temperature il contenuto di catalasi nel sangue è notevolmente aumentato.

Si vede inoltre che la catalasi scinde una maggior quantità di acqua ossigenata quando la concentrazione del perossido è maggiore (Bach) (3).

(1) W. E. Burge, Americ. Journ. of. Physiol, Proced. *59*, pag. 290, 1922.

(2) W. E. Burge, Americ. Journ. of. Physiol. *65*, pag. 527, 1923.

(3) Bach, Ber. d. chem, Gesell. *38*, p. 1878; 1905,

Biologia. — *La pretesa migrazione dei cromosomi verso i poli durante l'anafase della cariocinesi.* Nota del prof. Ermanno Giglio-Tos, presentata dal Socio B. Grassi.

Se vi è errore largamente diffuso in Biologia è certo quello del credere che durante l'*anafase della cariocinesi avvenga una migrazione dei cromosomi dalla zona equatoriale verso i poli della cellula.* È così diffuso tale errore che io non saprei proprio dove trovare un trattato in cui nella descrizione dell'interessante fenomeno della divisione indiretta della cellula non si parli esplicitamente di questa migrazione, la quale è considerata anzi come il fenomeno fondamentale e caratteristico dell'anafase. E la cosa è diventata così abituale che, come se si trattasse di un fatto indiscutibilmente acquisito alla scienza, ognuno lo dice e lo ripete convinto di dire cosa che realmente risponda al vero.

È tanto suggestiva la figura della cariocinesi nella metafase!

Quei raggi del fuso che dalle centrosfere vanno ai singoli cromosomi e pare che su di essi si inseriscano; quell'allontanarsi reciproco dei cromosomi durante l'anafase ci dànno tale un'illusione che i cromosomi vengano attratti verso i centrosomi dai fili del fuso, che, senza preoccuparsi oltre dell'esattezza dei fatti, l'illusione venne trasformata in realtà e si disse e si continua a dire tuttora che i cromosomi, tirati o spinti, questo a noi non importa, migrino verso i centrosomi.

Eppure c'era un modo altrettanto semplice quanto dimostrativo per verificare se realmente questa migrazione avveniva! Bastava misurare la distanza che intercede tra i centrosomi ed i cromosomi nei varî istanti della metafase e dell'anafase. Se questa distanza fosse andata diminuendo col progredire dell'anafase era segno evidente che i cromosomi si avvicinavano realmente ai centrosomi; se invece non diminuiva ciò avrebbe offerto una prova sicura che tale avvicinamento in realtà non avveniva.

Io ho già in una mia precedente Nota [1] richiamato l'attenzione su questo fatto. Scrivevo allora: « da quel po' di esperienza mia e dall'esame delle numerose cariocinesi descritte dai varî autori mi pare che le cose non stieno esattamente in questi termini. L'allontanamento dei cromosomi, che realmente avviene, ci dà l'illusione che si avvicinino ai poli, ma, se si tien

[1] Giglio-Tos E., *Studî sulla meccanica dello sviluppo*: I. *La cariocinesi*, in: Rivista di Biologia, vol. V, 1923.

conto che contemporaneamente, per il continuo allungarsi della cellula anche i centrosomi vanno gradatamente allontanandosi in egual misura, si può facilmente rendersi conto che la distanza dei cromosomi dai centrosomi si mantiene costante, almeno fino a divisione compiuta ».

Nello scrivere queste parole io sapevo di esprimere cose contrarie alle idee più comuni, più dominanti nel campo biologico e mi trovavo, unico scismatico, a dover da solo sostenere il peso di un'affermazione che distruggeva uno dei dogmi della citologia. Mi dava però coraggio la ferma convinzione dell'esattezza della mia interpretazione della cariocinesi, sicuro che la verità si sarebbe imposta ugualmente.

Ma quello che era sfuggito a tutti gli altri non era però passato inosservato all'acuta indagine del Boveri e me ne accorsi nel rivedere quel magistrale suo lavoro sulla fecondazione e sulla divisione dell'uovo di *Ascaris megalocephala* (1).

Ecco quanto fin d'allora egli scriveva (pp. 119 e seg.):

« Die Behauptung nun, dass die Trennung der Tochterplatten durch die Kontraktion der Spindelfasern bedingt sei, ist nur zum kleinsten Teile richtig. Denn es handelt sich bei dem Vorgang des Ausseinanderweichens im wesentlichen nicht um eine Bewegung der Tochterelemente gegen die Pole, sondern um eine Bewegung der Pole selbst, die die mit ihnen verbundenen Chromatinfäden einfach nachziehen. Das geht aus meinen fig. 65, 67, 69 (Taf. IV) auf klarste hervor. Der Abstand eines jeden Zentralkörperchens von der zugehörigen Tochterplatte ist in allen Stadien des Auseinanderweichens annähernd der gleiche und ebenso gross als die Entfernung der Centrosomen von der noch ungespaltenen Aequatorialplatte (fig. 44 *a*). Dagegen nimmt der Abstand der beiden Zentralkörperchen voneinander, dem Auseinanderrücken der Tochterplatten entsprechend, immer mehr zu. Es muss zwar zugegeben werden, dass die Teilungsbilder der fig. 65 bis 69 aus höheren Spindeln hervorgegangen sein könnten, als eine solche in fig. 44 *a* dargestellt ist; allein auch dann kann die Verkürzung der Spindelkegel, die ich ja nicht durchaus in Abrede stelle, keine beträchtliche und für die Erklärung der Entfernung der Tochterplatten ausreichende sein; denn die Achse der ruhenden Spindel ist in den mir vorliegenden Eiern häufig kürzer (fig. 59) als in dem Ei der fig. 44 *a*, selten länger, bedeutend länger nie. Eine Entfernung der Centrosomen, wie sie in fig. 67 *a* erreicht ist, habe ich in einer ruhenden Spindel niemals beobachtet.

« Uebrigens lässt sich auch aus Van Beneden's Taf. XIX *ter* entnehmen, dass der Hauptantheil an der Entfernung der Tochterplatten voneinander auf das Auseinanderrücken der ganzen Spindelhälften zurückgeführt werden muss. Die bereits weit voneinander entfernten Tochterplatten in fig. 10 dieser

(1) Boveri Th., *Zellen-Studien.* Heft 2. Die Befruchtung und Teilung des Eies von Ascaris megalocephala, Jena, 1888.

Tafel sind den zugehörigen Centrosomen kaum näher gerückt, als wir sie in fig. 4, im Moment der Spaltung der Aequatorialplatte, von diesen Körperchen abstehen sehen » (pp. 120-121).

Risulta dunque in modo ineccepibile che il Boveri aveva constatato che l'allontanamento dei cromosomi non avveniva perchè questi migrassero verso i poli, ma perchè i poli stessi si allontanavano l'un dall'altro e quindi che nell'anafase i cromosomi non si avvicinavano ai poli ossia ai centrosomi, ma anzi conservavano rispetto a questi sempre la stessa distanza.

Difatti, se si prendono le relative misure sulle figure che accompagnano il lavoro del Boveri, figure eseguite con la massima cura e allo stesso ingrandimento, si trova che nella fig. 44 *a* della tav. II che rappresenta un uovo alla metafase, la distanza dei centrosomi fra di loro è di mm. 13 e quella dei centrosomi dalla piastra equatoriale è pertanto di mm. 6,5. Nella fig. 59 della Taf. III, che rappresenta un altro uovo, la distanza dei centrosomi è di mm. 9,5 e la loro distanza dalla piastra equatoriale è di mm. 4,75.

Nella fig. 65 della Taf. IV, dove appena si è iniziata l'anafase ed i cromosomi sono di pochissimo allontanati fra di loro, la distanza dei centrosomi è di mm. 13,75 ma la loro distanza dai cromosomi è sempre di mm. 6,5.

Nella fig. 67 i centrosomi distano fra di loro già di 16 mm. e dai relativi cromosomi di mm. 7; nella fig. 69 distano rispettivamente di mm. 18,25 e di mm. 6,5.

Nella fig. 71, dove la divisione è già compiuta, i centrosomi distano fra di loro di mm. 24, ma la distanza loro dai cromosomi è sempre di mm. 6,5.

Nella fig. 79 la distanza dei cromosomi fra di loro è di mm. 20 ma quella dei cromosomi è di mm. 6,5.

Nella fig. 80 *b* la distanza dei centrosomi fra di loro è di mm. 21, ma costantemente di mm. 6,5 è la distanza di essi dai cromosoni.

Ma v'ha di più.

Nella fig. 78 sono rappresentati i due primi blastomeri, di cui uno alla metafase. Ebbene in tal caso la distanza dei centrosomi fra di loro è di cm. 14, ma quella dei cromosomi è anche qui di mm. 6,5.

Se si passa all'esame delle figure della tav. XIX-*ter* annessa alla Monografia di van Beneden [1] noi possiamo constatare la stessa cosa.

Nella fig. 4 la distanza dei centrosomi fra di loro è di mm. 24 e quella dai cromosomi alla fase di piastra equatoriale è di mm. 12.

Nella fig. 10, in anafase già avanzata, la distanza dei centrosomi è diventata di mm, 32 ma quella dei cromosomi è rimasta all'incirca la stessa (10 mm.) come fa rilevare lo stesso Boveri.

[1] Van Beneden E., *Récherches sur la maturation de l'oeuf et la fécondation — Ascaris megalocephala*, Arch. de Biol., vol. IV, 1883.

Non si può dunque dire che durante l'anafase i cromosomi migrino verso i centrosomi perchè conservano sempre una distanza costante da questi.

Questa è la ragione per cui Boveri nega che sia attendibile la spiegazione data da van Beneden col supporre che i fili del fuso si contraggano e tirino a sè i cromosomi. E, poichè è chiaro che sono i centrosomi che si allontanano, egli ammette che ciò avvenga per contrazione dei raggi polari opposti al fuso.

« Da für die Annahme einer abstossenden Kraft zwischen den beiden Centrosomen kein Grund vorliegt, so wird das Auseinanderweichen derselben ausschliesslich auf die Kontraktion der den Spindelfasern opponierten, an die Membran des Eies festgehefteten Polradien, also in erster Linie auf die Verkürzung der von van Beneden und Neyt entdeckten « cônes antipodes » zurückzuführen sein. Die belgischen Forscher schreiben den Fibrillen dieser Polkegel zwar auch einen gewissen Anteil an der Teilungsmechanik zu, aber nur insofern, als dieselben dem Zentralkörperchen einen Halt gewahren, damit dieses bei der Kontraktion der Spindelfasern nicht gegen den Aequator gezogen wird » (pag. 121).

In poche parole: secondo van Beneden i fili del fuso tirano i cromosomi ed i raggi polari (cônes antipodes) non servono che a tener fermi i centrosomi durante questa trazione: secondo Boveri invece i raggi polari tirano tutto l'insieme: centrosomi, fuso e cromosomi.

« Diese (die Spindelfasern) nehmen daher an der Auseinanderführung der Tochterplatten nur sehr geringen aktiven Antheil; ihre Hauptrolle besteht vielmehr darin, dass sie die Tochterelemente mit dem bewegten Centrosoma verbinden und dieselbe dadurch zwingen, die Bewegung mitzumachen ».

È strano però che al Boveri, cui non è sfuggito questo fatto, che poi doveva per più di trent'anni passar inosservato a tutti gli altri Biologi, ne abbia trascurato un altro ben più importante che gli avrebbe fatto abbandonare senz'altro la sua insostenibile ipotesi della contrazione dei fili polari.

Se, come ha misurato la distanza dei centrosomi fra di loro e dai cromosomi, avesse pure misurato la distanza dei centrosomi dalla periferia della cellula avrebbe potuto osservare che le cose non si svolgono come dovrebbe avvenire se veramente i fili polari tirassero a sè il centrosoma. Poichè è naturale che, se veramente così avvenisse, il centrosoma dovrebbe avvicinarsi alla periferia di quel tanto che si allontanano i cromosomi. Ciò che invece non avviene.

Del resto contro a questa ipotesi, come contro a tutte quelle che basano la spiegazione della meccanica della divisione su una facoltà qualsiasi elastica o contrattile dei fili del fuso o dei fili polari, stanno i fatti innegabili dell'allungamento della cellula durante l'anafase e della mobilità del fuso.

Che la cellula si allunghi durante la divisione non si vede molto chiaramente nelle figure del Boveri, forse perchè l'uovo era rinchiuso in un guscio che ne impediva l'allungarsi. E difatti il fenomeno cariocinetico descritto dal Boveri è proprio quello che si svolge in una cellula chiusa in un guscio. In nessuna figura le due cellule sono rappresentate con un solco profondo e tanto meno tangenti fra di loro quando la divisione è finita. In ogni figura sono invece largamente a contatto con una vasta superficie. E senza dubbio fu questa la ragione per cui Boveri non potè notare l'allungarsi della cellula e constatare che nell'allontanamento dei cromosomi non si tratta solamente e giustamente, com'egli fa rilevare, dell'allontanamento dei centrosomi e insieme ad essi passivamente dei cromosomi che vi stanno legati dai fili del fuso, ma dell'allontanamento di tutto il sistema formato dai centrosomi, dall'astro e dai cromosomi, il che non è compatibile con altro che con l'allungarsi di tutta la cellula. Allora avrebbe potuto accorgersi che, se la sua ipotesi era capace di spiegare l'allontanamento reciproco dei cromosomi, non poteva assolutamente spiegare l'allontanamento delle due masse intere che formano le due cellule figlie.

Se poi avesse posto mente alla mobilità del fuso allora ancor meglio avrebbe potuto convincersi che la sua ipotesi della trazione era insostenibile, come lo sono pure tutte le altre ipotesi analoghe.

Tutte queste ipotesi sono ormai tramontate, ma hanno lasciato dietro di sè come strascico la pretesa migrazione dei cromosomi verso i centrosomi. Anche questa falsa credenza deve scomparire.

Quanto tempo e quanta fatica sprecati per la soluzione di un problema che non esiste!

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Volterra dà il triste annuncio della perdita fatta dall'Accademia nella persona del Socio nazionale senatore P. Leonardi Cattolica. Il Presidente ricorda i meriti dell'estinto, il quale educato alla Scuola dell'Ammiraglio Magnaghi (egli pure Socio della nostra Accademia) divenne uno dei più dotti idrografi Italiani. Il Cattolica diresse lungamente l'Istituto idrografico della R. Marina a cui diede nuovo impulso ed elevato indirizzo scientifico. Fu valoroso insegnante dell'Accademia Navale ove professò l'astronomia, l'idrografia e la navigazione. Il Presidente aggiunge che come Ministro della Marina, l'Ammiraglio Cattolica si acquistò grandi benemerenze durante la guerra di Libia e che egli ebbe parte importante nella organizzazione della nostra marina. Fin dall'inizio si adoperò alla costituzione del Comitato talassografico Italiano, promossa dapprima dalla Società Italiana per il progresso della Scienza. Ma mentre egli resse il Ministero della Marina, questa importante istituzione fu trasformata in Ente di Stato

ed ebbe i mezzi necessarî pel suo sviluppo e per raggiungere gli scopi scientifici e pratici che si era proposto. Anche dopo aver lasciato gli uffici della Marina, il compianto Socio Leonardi-Cattolica dedicò sempre la propria attività allo studio di importanti questioni e al movimento scientifico del nostro Paese.

Il Socio De Stefani legge una Commemorazione del Socio prof. Capellini, del quale ricorda la vasta e feconda opera compiuta negli studî di geologia e di paleontologia, durante la sua vita lunga ed operosa.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Il Socio Albertoni presenta, perchè venga sottoposta all'esame di una Commissione, la Memoria del prof. G. Cuneo, intitolata: *La natura della reazione che dà luogo alla formazione dei nucleoproteidi.*

RELAZIONI DI COMMISSIONI

La Classe approva poscia la inserzione nei volumi delle Memorie, salvo le consuete riserve e secondo le proposte delle Commissioni esaminatrici, dei seguenti lavori:

Cumin G., *Studi geologici e petrografici sul monte Calvario presso Manziana (Lazio)*. (De Stefani rel., e Millosevich).

Luciano Magda, *Ricerche cristallografiche sul diopside di Saulera (Val d'Ala)*. (Zambonini rel., e Millosevich).

Sapuppo Riccardo, *Sul fenomeno dell'assorbimento gravitazionale.* (Armellini rel., e Levi-Civita).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste il volume: *British (Terra Nova) Antarctic Expedition 1910–1913. Report and the Maps and Surveys*, di F. Debenham.

Il Socio Grassi fa omaggio di una pubblicazione del Socio sen. Golgi, avente per titolo: *Intorno alla struttura ed alla biologia dei cosidetti globuli (o piastrine) del tuorlo*; e in seguito a sua proposta, alla quale e il Presidente e la Classe si associano, si delibera d'inviare al Socio Golgi un telegramma di ringraziamento e di augurii per il proseguimento delle sue ricerche, le quali hanno dato tanti e grandi risultati alla scienza, e tanto onore al Paese e all'Accademia.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 aprile 1924.

Allomeni A. — Il piano delle eclissi. Nota II. Cernusco sul naviglio, 1924. 8°, pp. 1-3.

Bos (van den) W. H. — The Orbit of Bu 6883 = Σ 1834. (Repr. from. « Proceedings », vol. XXIV, N^os 1, 2 and 3, pp. 72-77). Amsterdam, 1921. 8°.

Bottazzi F. — La grotta « Zinzulusa » in Terra d'Otranto e il ritrovamento in essa di Thyphlocaris. (Estr. dalla « Rivista di Biologia », vol. V, fasc. III). Roma, 1923. 8°, pp. 1-10.

Cabreira A. — Méthode pour obtenir les coordonnées géographiques et estrolabes mécanique et solaire. Lisbonne, 1924. 8°, pp. 1-18.

Campanile G. — Contribuzioni allo studio della biologia delle cuscute. (Estr. dalla « Rivista di Biologia », vol. V). Roma, 1923. 8°, pp. 1-19.

Campanile G. — Su di una nuova malattia dell'aglio dovuta ad « Helmiathosporium Allii. » nov. sp. (Estr. dai « Nuovi annali di Agricoltura », anno IV, pp. 87-106. Roma, 1924. 8°.

Choffat P. — Esquisse de la carte des régions éruptives au nord du Tage. (Extr. des « Mémoires de la Societé de physique et d'histoire naturelle de Genève », pp. 461-467). Genève, 1923. 4°.

Debenham F. — Report ou the Maps and Surveys. (British [Terra Nova] Antarctic Expedition 1910-1913). London, 1923, 4°, pp. I-VIII, 1 94.

Del Valle G — Bilancio idrologico dei bacini imbriferi (Estr. da l'Elettrotecnica, anno IX). Varese, 1922. 4°, pp. 1-8.

Del Valle G. — Regimazione dei bacini montani e loro rapporti colle bonifiche ed irrigazioni (Estr. dall'Elettrotecnica, vol. I). Firenze, 1923. 4°, pp. 1-10.

Eindverslag over de Ouderzoekingen en Uitkomsten van den Dienst der Rejksopsporing van Delfstoffen in Nederland 1903-1916. Amsterdam, 1918, 4°, pp. 1-664.

Golgi C. — Intorno alla struttura ed alla biologia dei cosidetti globuli (a piastrine) del tuorlo. (Estr. dalle « Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. XXII, pp. 161-173). Milano, 1923, 4°.

Hins C. H. — On a change with the declination in the personal equation in meridian-observations. (Repr from: « Proceedings », vol. XXIV, N^os 4 and 5, pp. 168-176). Amsterdam, 1921. 8°.

Lecat M. — Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions. Louvain, 1424. 8°, pp. 1-16.

Lecat M. — Compléments à la Bibliographie des séries trigonométriques. Louvain, 1924. 8°, pp. 1-15.

Lecat M — Contribution à la théorie de la multiplication des déterminants généraux. (Extr. de « The Thohoku Mathematical Journal », vol. XXIII, pp. 137-156). Sendai, 1923. 8°.

Looman H. — Sur la totalisation des dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes. (Extr. de « Fundamenta Mathematicae », t. IV, pp. 246-285). Cracovie, 1922, 8°.

Notice sur l'Institut Pasteur de Tunis. Tunis, 1924, 8°. pp. 1-23.

Oort J. H. and Schilt J. — The frequency of a component of the linear velocity for stars brighter than 5.^m8

of spectral types F, G, K and M, derived from the proper motions of Boss' catalogue. Groningen, 1924. 4°, pp. 1-35.

Peyronel B. — Alcune osservazioni sulla biologia della Rizottonia della patata [*Hypochnus Solani* Prill. et Dol.]. (Estr. dal « Bollettino mensile di informazioni e notizie, anno V, n. 1-3). Roma, 1924. 8°, pp. 1-18.

Peyronel B — Prime ricerche sulle micorize endotrofiche e sulla micoflora radicicola normale delle fanerogame. (Estr. dalla « Rivista di Biologia », vol. V, fasc. IV; vol. VI, fasc. I). Roma, 1924. 8°, pp. 1-61.

Peyronel B. — Sopra un singolare parassita polifago: Valdensia heterodoxa n. gen. et n. sp. (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LVI, pp. 521-538). Modena, 1923. 8°.

Schilt J. and Oort J. H. — The frequency of a component of the linear velocity for stars brighter than 5.^{m}8 of spectral types F, G, K. and M, derived from the proper motions of Boss' catalogue. Groningen, 1923. 4°, pp. 1-35.

Schumann R. — Ergebnisse aus Drekwagen-Messungen im Wiener Becken. (Gravimetrische Tiefenmessung.). Wien, s. d. 4°, pp. 1-8.

Sellerio A. — Il problema delle zone di silenzio (Estr. dal « Giornale di Scienze naturali ed economiche di Palermo », vol. XXXIII). Palermo, 1924. 4°, pp. 1-17.

Silvestri F. — Descriptiones termitum in anglorum Guiana repertorum. Extr. da « Zoologia », vol. III, pp. 307-321). New York, 1923 8°.

Silvestri F. — Formiche di Spagna. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici, vol. XVII, pp. 164-171). Portici, 1924, 8°.

Silvestri F. — Myriapoda from the Siju Cave, Gara Hills, Assam. (Estr. da « Records of the Indian Museum », vol. XXII, part I, pp. 71-79). Calcutta, 1924, 8°.